Groupe Avancé : Polynomes

6 novembre 2022

Appéritif

Exercice 1. Trouver toutes les paires d'entiers positifs (m, n) telle que $1 + x + \cdots + x^m$ divise $1 + x^n + \cdots + x^{mn}$.

Exercice 2. Soit P un polynome à coefficient entier. Montrer que si $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs alors $P(x) = 0$ n'a pas de solution entière.

Entrée

Exercice 3. Soit P un polynôme réel de degré n tel que $P(j^2)$ sont entiers pour tout j entre 0 et n. Montrer que pour tout entier k, $P(k^2)$ est entier.

Exercice 4. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des entiers différents. Montrer que le polynome $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 5. Soit p premier. Montrer que $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ est irreductible dans $\mathbb{Q}[x]$.

Plat principal

Exercice 6. Trouver toutes les solutions du système

$$\begin{aligned} x + y + z &= w \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

Exercice 7. Montrer que le polynome $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x + a_0$ ne peut pas avoir toutes ses racines réelles.

Exercice 8. Résoudre l'équation $\sqrt{5 - x} = 5 - x^2$.

Exercice 9. On choisit des réels $a_1, ...a_n$ distincts et $b_1, ..., b_n$ également des réels distincts. On construit un tableau de taille n $\times$ n en inscrivant pour chaque case le réel $a_i + b_j$, où i est le numéro de ligne et j le numéro de colonne. Montrer que si le produit des éléments d'une ligne du tableau est indépendant de la ligne choisie, alors le produit des éléments d'une colonne est indépendant de la colonne choisie.

Exercice 10. Soit $P(x)$ un polynome à coefficient réels et $P(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que il existe un entier n tel que les coefficients du polynome $(1+x)^n P(x)$ sont tous positifs.

Dessert

Exercice 11. (Short list IMO, 2002). Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d entiers, $a \neq 0$. Montrer que si $xP(x) = yP(y)$ pour un nombre infini d'entiers x, y, $x \neq y$ alors $P(x)$ a une racine entière.

Exercice 12. Trouver tous les polynomes $P(x)$ à coefficients réels tel que

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

pour tout a, b, c réels qui satisfont $ab + bc + ca = 0$.

Exercice 13. Soit $P(x)$ un polynome de degré $n > 1$ à coefficient entiers et soit k un entier positif. On considère le polynome $Q(x) = P^{\circ k}(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$ Montrer que Q a au plus n points fixes (solution à $Q(x) = x$).