Equations fonctionnelles

November 6, 2022

Appéritif

Exercise 1. Soient P et Q deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Montrer que si $P(x) = Q(x)$ n'a pas de solutions, alors $P(P(x)) = Q(Q(x))$ n'a pas de solutions.

Exercise 2. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f est monotone et $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que ∀x :

$$f^n(x) = -x$$

Exercise 3. Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$f(n) + f(m) | n + m$$

Entrée

Exercise 4. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R}_+^* \to [1, +\infty[$ telles que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\prod_{k=1}^{n} f(kx) < 2010 n^{2010}$$

Exercise 5. Trouver toutes les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x, y > 0$,

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$$

Plat principal

Exercise 6. Trouver toutes les $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que f est continue et $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$f(f(z)) = \exp(z).$$

Exercise 7. Trouver $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout p premier et n naturel,

$$f(n)^p \equiv n[f(p)]$$

Exercise 8. Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tels que $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n$$

Exercise 9. Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $\forall n \geq 1$,

1. $f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 11$
2. $f(n) \geq 2$

Exercise 10. Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Exercise 11. Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

Fromage

Exercise 12. Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(x) + x^2.$$

Exercise 13. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de Cauchy dont le graphe n'est pas dense dans le plan. Montrer que f est linéaire.

Dessert

Exercise 14. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les deux équations fonctionnelles suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$.

Exercise 15. (IMO, P1 2019) Trouver toutes les applications f de R dans R vérifiant la condition suivante : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Exercise 16. (IMO, P5 2009) Trouver toutes les applications f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la condition suivante : $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1)$$

soient les côtés d'un triangle non applati.