Groupe D-Pot Pourri

March 13, 2022

Exercise 1. [P1, IMO 2006] Soit ABC un triangle et I le centre du cercle incrit. Un point P à l'intérieur du triangle satisfait

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geq AI$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $P = I$.

Exercise 2. [P1, IMO 2019] Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Exercise 3. [P1, IMO 2017] Pour tout entier $a_0 > 1$, on définit la suite $a_0, a_1, a_2, \cdots$ par :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \text{ est un entier} \\ a_n + 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer toutes les valeurs de a_0 pour lesquelles existe un nombre A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeur de n.

Exercise 4. [P4, IMO 2011] Soit n un entier strictement positif. On dispose d'une balance à deux plateaux et de n poids, de masse respectives $2^0, 2^1, \cdots, 2^{n-1}$. On doit placer, l'un après l'autre chacun des n poids sur la balance de telle sorte que le plateau de droite ne soit jamais plus lourd que le plateau de gauche: dans ce but à chaque étape, on doit choisir un poids qui n'est pas déjà sur la balance et le placer soit sur le plateau de gauche, soit sur le plateau de droite; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les poids soient placés.

Déterminer le nombre de façons de procéder.

Exercise 5. [P2, IMO 2012] Soit $n \geq 3$ et $a_2, a_3, \cdots, a_n$ des réels strictement positif tels que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Montrer que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Exercise 6. [P4, IMO 2007] Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de $[BC]$ en P et la médiatrice de $[AC]$ en Q. Le milieu de $[BC]$ est K et le milieu de $[AC]$ est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Exercise 7. [P5, IMO 2007] Soit a, b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab - 1$ divise $(4a^2 - 1)^2$, alors $a = b$.

Exercise 8. [P3, IMO 2017] Un lapin invisible et un chasseur "jouent" dans un plan euclidien. La position initiale A_0 du lapin et la position initiale B_0 du chasseur coincident. Après $n - 1$ tours de jeu, le lapin se trouve au point A_{n-1} et le chasseur au point B_{n-1}. Lors du $n^{\text{ème}}$ tour de jeu, trois évènements succéssifs se produisent:

1. Le lapin se déplace sans être vu jusqu'en un point A_n tel que la distance entre A_n et A_{n-1} est égale à 1.

2. Un système de localisation indique un point P_n au chasseur avec pour seul garantie que la distance entre A_n et P_n ne dépasse pas 1.

3. Le chasseur se déplace de façon visible jusqu'en un point B_n tel que la distance entre B_n et B_{n-1} est égale à 1.

Est il toujours possible pour le chasseur que quels que soient les déplacements du lapin et les points indiqués par de système de localisation, il puisse choisir ses déplacements de sorte qu'après 10^9 tours dejeu, il soit certain que la distance entre lui et le lapin ne dépasse pas 100.