DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Montpellier 2014

Autour de $a^n \pm b^n$

1 Théorème LTE

- Exercices -

Exercice 1 Soient a, n deux entiers strictement positifs et p un nombre premier impair tel que $a^p \equiv 1 \mod p^n$. Montrer que $a \equiv 1 \mod p^{n-1}$.

Exercice 2 Soit k un entier strictement positif. Trouver tous les entiers strictement positifs n tels que 3^k divise $2^n - 1$.

Exercice 3 Soit p un premier impair et m un entier tel qu'il existe des entiers $x, y > 1$ vérifiant

$$\frac{x^p + y^p}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m.$$

Montrer que $m = p$.

Exercice 4 Trouver toutes les solutions entières de $x^{2009} + y^{2009} = 7^k$.

Exercice 5 (IMO 1990/3) Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que n^2 divise $2^n + 1$.

Exercice 6 (Bulgarie 1997) Pour un entier $n > 0$, $3^n - 2^n$ est la puissance d'un nombre premier. Montrer que n est premier.

Exercice 7 Soit a un entier strictement positif. On suppose que $4(a^n + 1)$ est le cube d'un entier pour tout entier positif n. Trouver a.

2 Théorème de Zsigmondy

- Exercices -

Exercice 1 (Italie TST 2003) Trouver tous les entiers strictement positifs (a, b, p) avec p premier tels que $2^a + p^b = 19^a$.

Exercice 2 Trouver tous les entiers positifs (x, y, n, k) tels que x et y soient premiers entre eux et tels que

$$3^n = x^k + y^k.$$

Exercice 3 (Iran) Soit A un ensemble fini de nombres premiers et soit $a \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers positifs n tels que tous les facteurs premiers de $a^n - 1$ appartiennent à A.

Exercice 4 (D'après IMO Shortlist 2002) Soit $n \geqslant 1$ un entier et soient $p_1, p_2, \dots, p_n$ des nombres premiers tous supérieurs ou égaux à 5. Montrer que $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ a au moins 2^{2^n} diviseurs différents.

Exercice 5 (IMO shortlist 2004 N4) Trouver tous les entiers strictement positifs a, m, n tels que $a^m + 1$ divise $(a + 1)^n$.

Exercice 6 (Etats-Unis 2001) Trouver tous les entiers strictement positifs x, r, p, n tels que p soit premier, $n, r > 1$ et $x^r - 1 = p^n$.

Exercice 7 (Compétition Tchèquo-Slovaque 1996) Trouver tous les entiers strictement positifs x, y, p tels que $p^x - y^p = 1$ avec p premier.

Exercice 8 (Pologne 2010) Soient q, p deux nombres premiers tels que $q > p > 2$. Montrer que $2^{pq} - 1$ a au moins trois facteurs premiers distincts.

Exercice 9 (Japon 2011)Trouver tous les entiers strictement positifs a, n, p, q, r tels que

$$a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1).$$

Exercice 10 (BMO 2009) Trouver tous les entiers strictement positifs x, y, z tels que $5^x - 3^y = z^2$.

Exercice 11 Trouver tous les nombres strictement positifs a, p, n tels que $p^a - 1 = 2^n(p - 1)$, où p est un nombre premier.

Exercice 12 Trouver tous les entiers strictement positifs a, m, n tels que

$$(a + 1)(a^2 + a + 1) \cdots (a^n + a^{n-1} + \cdots + 1) = a^m + a^{m-1} + \cdots + 1.$$

Exercice 13 (Roumanie TST 1994) Montrer que la suite $a_n = 3^n - 2^n$ ne contient pas trois termes d'une même suite géométrique.

Exercice 14 (Angleterre 1996) Trouver les entiers positifs x, y, z tels que $2^x + 3^y = z^2$.

Exercice 15 Résoudre l'exercice 4 en vous aidant du théorème de Zsigmondy, qui, pour rappel, demandait de trouver toutes les solutions entières de

$$x^{2009} + y^{2009} = 7^k$$

Exercice 16 Résoudre l'exercice 6 en vous aidant du théorème de Zsigmondy, dont l'énoncé est le suivant pour rappel. Pour un entier $n > 0$, $3^n - 2^n$ est la puissance d'un nombre premier. Montrer que n est premier.

Exercice 17 (Shortlist 1997) Soient b, m, n des entiers strictement positifs avec $b > 1$ et $m \neq n$. Prouver que si $b^m - 1$ et $b^n - 1$ ont les même facteurs premiers, alors $b + 1$ est une puissance de 2.

Exercice 18 (Iran 2006) Soient $a, b, c, k \geqslant 1$ des entiers. On pose $n = a^{c^k} - b^{c^k}$. Si c est divisible par au moins q nombres premiers différents, montrer que n est divisible par au moins qk nombres premiers différents.