Feuille d'exercice 9, Mouvement Brownien et problème de Dirichlet. Correction

June 9, 2021

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier ou donner un contre-exemple.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $a, b \geq 0$ et $T_{a,b} = \inf\{t : B_t = at + b\}$

- ☐ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,$\mathbb{E}(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}) = 1$. VRAI
- ☐ Soit $s < t$, $\mathbb{E}((B_t - B_s)e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}) = 0$. FAUX
- ☐ $\mathbb{E}(1_{T_{a,b}\leq t} e^{aB_t - \frac{a^2}{2}t}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} ds$. VRAI
- ☐ Si $a, b > 0$ alors $\mathbb{P}(T_{a,b} = \infty) > 0$ VRAI

Solution 1. En effet

1. Oui, c'est l'égalité standard. Pour rappel puisque B_t est une gaussienne de variance t on a
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t} + \alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2t}} dx = 1.$$

2. Non, On note $\mathbb{Q}_\alpha$ la probabilité $\mathbb{P}$ multiplié par le poid $e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$. Par Girsanov $\tilde{B}_t := B_t - \alpha t$ est un mouvement Brownien pour la probabilité $\mathbb{Q}_\alpha$.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}((B_t - B_s)e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}((B_t - B_s)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s + \alpha(t-s)) \\ &= \alpha(t-s) \neq 0\end{aligned}$$

3. Oui avec la même notation que précédement pour $\alpha = a$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1_{T_{a,b}\leq t}e^{aB_t - \frac{a^2}{2}t}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}(1_{T_{a,b}\leq t})\\ &= \mathbb{Q}_a(\exists s \leq t : B_s = as + b)\\ &= \mathbb{Q}_a(\exists s \leq t : \tilde{B}_s = b)\\ &= \mathbb{Q}_a(\sup_{s\leq t} \tilde{B}_s \geq b)\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}}ds\end{aligned}$$

où on a de nouveau utilisé Girsanov et que $\sup_{s\leq t} B_s$ a la même loi que $|B_t|$ (principe de réflection).

4. Oui, On a $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t} = 0) = 1$ (voir feuilles d'exercices précédentes) et donc $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} B_t - at = -\infty) = 1$. Alors il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} B_t - at \leq C) > 0$. On a également que $\mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\}) > 0$. Finallement

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\forall t \geq 0, B_t = at + b)\\ &\quad\geq \mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\} \cap \{\forall s \geq 1, B_s - as \leq 0\})\\ &\quad\geq \mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\} \cap \{\forall s \geq 1, B_s - B_1 - as \leq C\})\\ &\quad\geq \mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\})\mathbb{P}(\{\sup_{s\geq 0}, B_s - as \leq C\})\\ &\quad> 0\end{aligned}$$

On a utilisé que par la propriété de Markov simple $B_t - B_1$ est un mouvement brownien indépendent de $\mathcal{F}_1$.

Exercise 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.

- ☐ Pour tout $a \geq 0$

$$\mathbb{P}(\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \geq a) = \mathbb{P}(\limsup_{t\to 0}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} \geq a).$$

  VRAI

- ☐ Pour tout $a \geq 0$, $\mathbb{P}(\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \geq a) = 0$ ou 1. VRAI

- ☐ $\mathbb{P}(B_t - B_{t/2} \geq \sqrt{t\log\log t}) \geq \frac{e^{-a^2\log\log t}}{2\sqrt{\pi}\log\log t}$ VRAI

- ☐ $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(B_{2^n} - B_{2^{n-1}} \geq (1-\epsilon)2^{n/2}\sqrt{\log\log 2^n}) = \infty$ VRAI

Solution 2. En effet

1. Oui, On note $u = \frac{1}{t}$ et alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \geq a) = \mathbb{P}(\limsup_{u\to 0} \frac{uB_{\frac{1}{u}}}{\sqrt{2u\log\log\frac{1}{u}}} \geq a)$$

   et on peut conclure car par inversion du temps $W_u := uB_{\frac{1}{u}}$ est aussi un mouvement brownien donc

2. Oui, On a clairement $\{\limsup_{u\to 0} \frac{uB_{\frac{1}{u}}}{\sqrt{2u\log\log\frac{1}{u}}} \geq a\} \in \mathcal{F}_{0^+}$ Donc par loi du 0-1. $\mathbb{P}(\limsup_{u\to 0} \frac{uB_{\frac{1}{u}}}{\sqrt{2u\log\log\frac{1}{u}}} \geq a) = 0$ ou 1.

3. Oui, Pour une gaussienne de variance $t/2$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{t}}ds &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{t}-\frac{2xs}{t}-\frac{s^2}{t}}ds \\ &\geq \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{2xs}{t}}ds \\ &\geq \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{t}}{2x}\end{aligned}$$

   Ici avec $x = a\sqrt{t\log\log t}$ on a

$$\mathbb{P}(B_t - B_{t/2} \geq a\sqrt{t\log\log t}) \geq \frac{e^{-a^2\log\log t}}{2\sqrt{\pi\log\log t}}$$

4. Oui, Avec $t = 2^n$,on a

$$\mathbb{P}(B_{2^n} - B_{2^{n-1}} \geq a2^{n/2}\sqrt{\log n + \log\log 2}) \geq \frac{e^{-a^2(\log n + \log\log 2)}}{2\sqrt{\pi}\log n + \log\log 2} \sim n^{-a^2}$$

   Donc la somme diverge si $a < 1$.

Exercise 3. Soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et h une fonction harmonique sur V.

- ☐ Pour tout $r > 0$ et $x \in V$ tel que $B_r(x) \subset V$, $h(x) = \int_{B_r(x)} h(y)\mu(dy)$ où μ est la mesure de probabilité uniforme sur la boule $B_r(x)$. VRAI
- ☐ Pour tout $r > 0$ et $x \in V$ tel que $B_r(x) \subset V$ $h(x) \leq \max_{y\in S_r(x)} h(y)$. VRAI
- ☐ La fonction $h(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. VRAI
- ☐ La fonction $h(x, y) = \cosh(x)\cosh(y)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. FAUX

Solution 3. En effet

1. Oui
$$\begin{aligned}\int_{B_r(x)} h(y)\mu(dy) &= \frac{n}{r^n}\int_{\rho=0}^{r}\int_{S_\rho(x)} h(y)d\sigma(y)\rho^{n-1}d\rho\\ &= \frac{n}{r^n}\int_{\rho=0}^{r} h(x)\rho^{n-1}d\rho\\ &= h(x)\end{aligned}$$
car puisque h est harmonique chaque point x est égale à la moyenne sur les sphères centrées x.

2. Oui
$$h(x) = \int_{S_r(x)} h(y)d\sigma(y) \le \max_{y\in S_r(x)} h(y)$$

3. Oui $\frac{\partial^2}{\partial x^2}h = 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}h = 0$ donc $\Delta h = 0$. On peut aussi vérifier que l'intérgrale sur une sphère de h donne bien par symétrie la valeur de h au centre de la sphère.

4. Non $h(0,0)$ est un minimum local strict. Ce il n'est donc pas harmonique. Autre solution : On peut calculer $\Delta h = 2h \neq 0$.

Exercise 4. Soit $(B_t)_{t\ge 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$. On définit le domaine $V = [(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4]$, $T_1 = \inf\{t : \|B_t\| = 1\}$ et $T_2 = \inf\{t : \|B_t\| = 2\}$.

- ☐ $T = \min(T_1, T_2) < \infty$ p.s VRAI
- ☐ $h(x,y) = \log(x^2+y^2)$ est une fonction harmonique sur V. VRAI
- ☐ Pour tout $(x,y) \in V$ $h(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}(g(B_T))$ avec $g(x,y) = 0$ si $x^2+y^2 = 1$ et $g(x,y) = \log 4$ si $x^2+y^2 = 4$. VRAI
- ☐ $\mathbb{P}_{(x,y)}(T_1 \ge T_2) = \log(x^2+y^2)$ FAUX

Solution 4. En effet

1. Oui, un mouvement brownien ne reste pas borné.
$$\mathbb{P}(T=\infty) \le \mathbb{P}(T_1 = \infty) = \mathbb{P}(\forall t : |B_t| \le 2) = 0$$

2. Oui. On calcul
$$\frac{\partial}{\partial x}\log(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$
et
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(x^2+y^2) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(x^2+y^2) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
donc $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h = 0$.

3. Oui, c'est la solution du problème de Dirichlet.
4. Non. Avec la question précédente on a que

$$\log(x^2 + y^2) = 0 \times \mathbb{P}(T = T_1) + \log 4 \times \mathbb{P}(T = T_2).$$

Donc $\mathbb{P}(T_1 \leq T_2) = \frac{\log(x^2+y^2)}{\log 4}$.