Mouvement brownien en dimension quelconque et problème de Dirichlet

April 25, 2021

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $a, b \geq 0$ et $T_{a,b} = \inf\{t : B_t = at + b\}$

- ☐ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t^2}{2}}) = 1$
- ☐ Soit $s < t$, $\mathbb{E}((B_t - B_s)B_s e^{aB_t - \frac{a^2 t^2}{2}}) = 0$
- ☐ $\mathbb{E}(1_{T_{a,b}\leq t} e^{aB_t - \frac{a^2 t^2}{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_b^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} ds$
- ☐ Si $a, b > 0$,$\mathbb{P}(T_{a,b} = \infty) > 0$

Exercise 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.

- ☐ Pour tout $a \geq 0$, $\mathbb{P}(\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} \geq a) = \mathbb{P}(\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} \geq a)$
- ☐ Pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} \geq a) = 1$ ou 0.
- ☐ $\mathbb{P}(B_t - B_{t/2} \geq a\sqrt{t \log\log t}) \geq \frac{1}{a\sqrt{t \log\log t}} e^{-a^2 \log\log t}$.
- ☐ Soit $\epsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(B_{2^n} - B_{2^{n-1}} \geq (1+\epsilon)2^{n/2} \log\log n) = \infty$.

Exercise 3. Soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et h une fonction harmonique sur V.

- ☐ Pour tout $r > 0$ et $x \in V$ tel que $B_r(x) \subset V$, $h(x) = \int_{B_r(x)} h(y)\mu(dy)$ où μ est la mesure de probabilité uniforme sur la boule $B_r(x)$.
- ☐ Pour tout $r > 0$ et $x \in V$ tel que $B_r(x) \subset V$, $h(x) \leq \max_{y\in S_r(x)}(h(y))$.
- ☐ La fonction $h(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
- ☐ La fonction $h(x, y) = \cosh(x)\cosh(y)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Exercise 4. Soit B_t un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$. On défini le domaine $V = [(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2^2]$. Et $T_1 = \inf[t : \|B_t\| = 1]$ et $T_2 = \inf[t : \|B_t\| = 2]$.

- ☐ $T = \min(T_1, T_2) < \infty$ p.s.
- ☐ $h(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ est une fonction harmonique sur V.
- ☐ Pour tout $(x, y) \in V$, $h(x) = \mathbb{E}_{(x,y)}[g(B_T)]$ avec $g(x, y) = 0$ si $x^2 + y^2 = 1$ et $g(x, y) = \log(2^2)$ si $x^2 + y^2 = 2^2$.
- ☐ $\mathbb{P}_{(x,y)}(T_1 \geq T_2) = \log(x^2 + y^2)$.