Feuille d'exercice 5: Chaine de Markov et fonction harmonique.

April 5, 2021

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire usuelle sur $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = (x \pm 1, y)|X_n = (x,y)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = (x, y \pm 1)|X_n = (x,y)) = \frac{1}{4}$$

et 0 dans les autres cas. On note Q la matrice de transition. Soit la fonction $h(x,y) = 1_{y\geq 1}$. On suppose $X_0 = (0,0)$.

- ☐ $\mathbb{P}(y_2 \geq 1) = \frac{1}{4}$. Faux
- ☐ $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $\sum_{(x',y'),(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathbb{Z}^2} Q((x,y),(x',y'))Q((x',y')(\tilde{x},\tilde{y})) = 1$. Correct
- ☐ $Q1 = 1$ (la fonction sur $\mathbb{Z}^2$ constante égale à 1). Correct
- ☐ $[Q^2h](0,0) = \frac{1}{2}$. Faux

Solution 1. En effet

1. Non, En comptant tous les chemins de longeur 2 issus de $(0,0)$ dont l'arrivée satisfait $y \geq 0$ on trouve $\mathbb{P}(y_2 \geq 1) = 5/16$
2. Oui puisque c'est une matrice de transfert : $\sum_{(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathbb{Z}^2} Q((x',y')(\tilde{x},\tilde{y})) = 1$ et $\sum_{(x',y')\in\mathbb{Z}^2} Q((x,y),(x',y')) = 1$.
3. Oui cette égalité est toujours vrai quelque soit la chaine de Markov. Elle découle directement de $\sum_{(x',y')\in\mathbb{Z}^2} Q((x,y),(x',y')) = 1$.
4. On peut calculer $[Qh](x,y) = \frac{1}{4}1_{y=0} + \frac{3}{4}1_{y=1} + 1_{y\geq 2}$ et ensuite

$$[Q^2h](x,y) = \frac{1}{16}1_{y=-1} + \frac{5}{16}1_{y=0} + \frac{11}{16}1_{y=1} + \frac{15}{16}1_{y=2} + 1_{y\geq 3}.$$

En particulier $[Q^2h](0,0) = \frac{5}{16}$. Plus simplement on peut aussi utiliser que

$$[Q^2h](0,0) = \mathbb{E}_{X_0=(0,0)}(h(X_2)) = \frac{5}{16}$$

Exercise 2. Soit une chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ avec $X_0 = x$ et la matrice de transition Q définit par

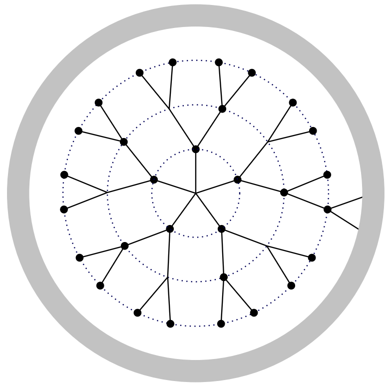
$$Q(y, y+1) = p_y \quad \text{et} \quad Q(y, y-1) = q_y$$

avec $p_y + q_y = 1$, $p_y, q_y > 0$ pour tout $y > 0$, $Q(0,0) = 1$ et $Q(y,z) = 0$ dans tous les autres cas. On pose $T_0 = \inf[k : X_k = 0]$.

- ☐ Si $p_y < \frac{1}{2}$ pour tout $y > 0$, alors X_n est une surmartingale. Correct
- ☐ Si $p_y < \frac{1}{2}$ pour tout $y > 0$, alors $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$. Correct
- ☐ La fonction
$$f(n) = \prod_{1\leq y\leq n} \frac{q_y}{p_y}$$
est harmonique sur $\mathbb{N}^*$. Faux
- ☐ Dans le cas $p_y = \frac{2}{3}$ et $q_y = \frac{1}{3}$ pour tout $y > 0$ et $x = 3$ alors
$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = \frac{1}{8}.$$
Correct

Solution 2. En effet

1. Oui $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = p_{X_n}(X_n + 1) + q_{X_n}(X_n - 1) = X_n + (p_{X_n} - q_{X_n}) = X_n + (2p_{X_n} - 1) \leq X_n$.
2. Oui une surmartingale positive converge. Ici la seul limite possible est 0 car si $X_n = y > 0$ alors $X_{n+1} = y \pm 1$. Donc $X_n \to 0$ p.s et puisqu'elle est à valeur entière elle est constante égale à 0 à partir d'un certain rang. Donc $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$.
3. Non le développement ne fonctionne pas.
4. Oui on peut vérifier que $h(n) = 2^{-n}$ est harmonique.
$$\frac{2}{3} \times 2^{-n-1} + \frac{1}{3} \times 2^{-n+1} = 2^{-n}$$
Alors 2^{-X_n} est une martingale. Elle est positive est uniformément borné. Elle converge donc p.s et dans L^1. Les seules limites possibles sont 0 (qui correspond à $X_n \to \infty$) et 1 (pour $X_n \to 0$). Le deuxième cas correspond à $T_0 < \infty$. On a alors
$$2^{-3} = \mathbb{E}(2^{-X_0}) = \mathbb{E}(2^{-X_{n\wedge T_0}}) = \mathbb{E}(2^{-X_{n\wedge T_0}} 1_{T_0<\infty}) + \mathbb{E}(2^{-X_n} 1_{T_0=\infty}).$$
Pour finir $\mathbb{E}(2^{-X_{n\wedge T_0}} 1_{T_0<\infty}) \to \mathbb{P}(T_0 < \infty)$ et $\mathbb{E}(2^{-X_n} 1_{T_0=\infty}) \to 0$.



Exercise 3. Soit E un arbre régulier infini de racine x_0. Sauf à la racine tous les sommets ont le même nombre d de voisins . Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire (standard) sur cet arbre. À chaque étape, elle saute d'un sommet à un sommet voisin de manière équiprobable : $\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) = \frac{1}{d}$ si (x, y) est une arète du graphe et 0 sinon. On note $r : E \to \mathbb{N}$ la distance dans le graphe par rapport à la racine ($r(x)$ =nombre d'arêtes du plus court chemin de x à x_0). On note $T_0 = \inf\{n : X_n = x_0\}$

- ☐ $(r(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sousmartingale.
- ☐ La fonction $h(x) = (d-1)^{-r(x)}$ est harmonique sur $E \setminus \{x_0\}$.
- ☐ Si $X_0 = x$, $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = (d-1)^{-r(x)}$.
- ☐ La fonction $g(x) = \mathbb{P}(T_0 < \infty|X_0 = x)$ est une fonction harmonique sur $E \setminus \{x_0\}$.

Solution 3. En effet

1. Oui, il y a $(d-1)$ arête qui s'éloigne de la racine et seulement une qui s'en rapproche donc

$$\mathbb{E}(r(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \frac{d-1}{d}(r(X_n)+1)+\frac{1}{d}(r(X_n)-1) = r(X_n)+\frac{d-2}{d} \geq r(X_n)$$

2. Oui On calcule

$$\frac{d-1}{d}(d-1)^{-r(x)-1} + \frac{1}{d}(d-1)^{-r(x)-1} = (d-1)^{-r(x)}.$$

3. Oui Même raisonnement que la question 4 de l'exercice précédent..

4. Oui cela découle directement de la question 2 et 3. On peut également utiliser le théorème du cours :

$$g(x) = \mathbb{E}_x(1_{T_0<\infty}u(X_{T_0}))$$

est une fonction harmonique. Ici on choisit $u(x_0) = 1$.

Exercise 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov sur E un ensemble discret avec matrice de transition Q. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *irreductible* si pour tout $x, y \in E$, il existe n tel que $\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) > 0$. On dit que X_n est *recurrente* si $\mathbb{P}(\exists n > 0, X_n = x|X_0 = x) = 1$ (le processus retourne à son point de départ presque surement). On admettra que si la chaine de Markov est irreductible et récurrente alors elle visite tous les points de E une infinité de fois presque surement.

- ☐ La marche aléatoire usuelle sur $\mathbb{Z}$ est récurrente.
- ☐ La fonction $h(n) = n$ est harmonique sur $\mathbb{Z}$ pour la marche aléatoire usuelle.
- ☐ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irreductible et recurrente. Alors toute fonction harmonique sur E et bornée inférieurement est constante.
- ☐ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irreductible et recurrente. Alors toute fonction harmonique sur E est constante.

Solution 4. En effet

1. Oui c'est un résultat très standard. Vous pouvez vous amusez à le redémontrer en utilisant la convergence de martingale et/ou le théorème de l'arret.
2. Oui $n = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n-1)$
3. Oui, Soit h une fonction harmonique bornée inférieurement donc quitte à ajouter une constante on peut supposé h positive. Alors $h(X_n)$ est une martingale positive qui converge donc p.s. Puisque X_n visite une infinité de fois chacun des points de E, pour tout $x \in E$, $h(x)$ est une valeur d'adérence. Or puisque $h(X_n)$ converge il n'existe qu'une seule valeur d'adérence. Conclusion h est constante.
4. Non, la marche aléatoire usuelle sur $\mathbb{Z}$ donne un contre exemple (question 1 et 2).