Feuille d'exercice 4: Convergence de martingales discrètes.

March 16, 2021

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale

- ☐ Si pour tout n, $M_n \geq -10$ alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ dans L^1.
- ☐ Si pour tout n $M_n \leq 10$ alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ p.s.
- ☐ Supposons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément bornée, alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ p.s.
- ☐ Supposons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément bornée, alors il existe M_∞ telle que $M_n \to M_\infty$ dans L^p pour tout $p \geq 1$.

Exercise 2. Soit f une fonction de $[0,1] \to \mathbb{R}$, $\int_0^1 |f(t)|dt < \infty$. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(2^n \int_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} f(t)dt\right) 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x)$$

alors

- ☐ $f_n \to f$ p.s (pour la mesure de Lebesgue) sur $[0,1]$.
- ☐ $f_n \to f$ dans L^1.
- ☐ Supposons de plus que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$, alors $f_n \to f$ dans L^1.
- ☐ Supposons de plus que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$, alors $f_n \to f$ dans L^2.

Exercise 3. Soit μ une mesure positive sur $[0,1]$, $\mu([0,1]) = 1$. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \mu([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})) 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x)$$

- ☐ Il existe$f$ telle que $f_n \to f$ p.s (pour la mesure de Lebesgue) sur $[0,1]$.

- ☐ Il existe f telle que $f_n \to f$ dans L^1.
- ☐ Si $\mu = \delta_{1/2}$ la mesure de dirac en 1/2, alors $f_n \to 0$ p.s. sur $[0, 1]$
- ☐ Si $\mu = \delta_{1/2}$ la mesure de dirac en 1/2, alors f_n est uniformément borné dans L^2.

Exercise 4. Soit M_n une martingale à accroissement indépendant avec $M_0 = 0$ et on pose $X_n = \exp(M_n)/\mathbb{E}(\exp(M_n))$.

- ☐ X_n est une martingale (pour la filtration associée à M_n).
- ☐ X_n converge p.s.
- ☐ $\mathbb{P}(\exists k : X_k \geq 2) \leq \frac{1}{2}$.
- ☐ $\mathbb{P}(\exists k_1 < k_2 < k_3 : X_{k_1} \geq 2, X_{k_2} \leq 1, X_{k_3} \geq 2) \leq \frac{1}{4}$.

Exercise 5. Soit ξ_n des variables aléatoires iid tel que $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_1^2) = \sigma^2$. Soit $(a_i)_{i\geq 1}$ une suite de réel tel que $\sum_{i=1}^n |a_i| < \infty$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\xi_k$.

- ☐ $A_n = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ converge dans L^2
- ☐ $A_n = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ converge p.s.
- ☐ S_n converge p.s
- ☐ S_n converge dans L^1