Feuille d'exercice 3: Martingales discrètes et temps d'arret

April 5, 2021

Pour chacun des exercices dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier.

Exercise 1. Soit X_n des variables iid telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, et on pose $\mathcal{F}_n = \sigma((X_k)_{k \leq n})$ la filtration canonique associé à X_n. Dans ce qui suit martingales, surmartingales ou sousmartingales sont sous entendus pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ☐ $A_n = \sum_{k=1}^{n} 3X_k$ est une martingale. Correct
- ☐ $B_n = \sum_{k=2}^{n+1} kX_k$ est une martingale. Faux
- ☐ $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 X_k - 3n$ est une sousmartingale. Faux
- ☐ $D_n = (A_n)^4$ est une sousmartingale. Correct

Solution 1. En effet

1. Oui, $(3X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des variables indépendentes de moyenne nulle.
2. Non B_n n'est pas $\mathcal{F}_n$ mesurable
3. Non, $\mathbb{E}(C_{n+1}|\mathcal{F}_n) = C_n - 3 < C_n$ est une surmartingale et non une sous-martingale
4. Oui, puisque A_n est une martingale et $x \to x^4$ est une fonction convexe (Jensen).

Exercise 2. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration et G_n un processus adapté.

- ☐ $T_1 = \min(k \in \mathbb{N} | G_k > 1)$ est un temps d'arret. Correct
- ☐ $T_2 = \min(k > T_1 | G_k < 0)$ est un temps d'arret. Correct
- ☐ $T_3 = \max(k \in \mathbb{N} | G_k = 0)$ est un temps d'arret. Faux
- ☐ $T_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } G_0 \leq 0 \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$ est un temps d'arret. Correct

(temps d'arret évidement sous entendu pour $\mathcal{F}_n$.)

Solution 2. En effet

1. Oui, comme dans le cours $\{T_1 = n\} = \cap_{k<n}\{G_k \leq 1\} \cap \{G_n > 1\}$est bien $\mathcal{F}_n$mesurable.

2. Oui, $\{T_2 = n\} = \cup_{l<n}[\{T_1 = l\} \cap_{l<k<n} \{G_k \geq 0\} \cap \{G_n < 0\}]$ est bien $\mathcal{F}_n$ mesurable. En règle général, le temps de la k-ième visite d'un processus adapté est également un temps d'arret.

3. Non, voir cours.

4. Oui, T_4 est $\mathcal{F}_0$ mesurable. Donc en particulier pour tout k, $\{T_4 = k\} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_k$.

Exercise 3. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sousmartingale , soit R_n et P_n des processus predictibles positifs.

- ☐ $A_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - M_{k-1})M_k$ est une martingale. Faux
- ☐ $B_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - M_{k-1})M_{k-1}$ est une martingale. Correct
- ☐ $C_n = -\sum_{k=1}^{n}(N_k - N_{k-1})2R_k$ est une sousmartingale. Faux
- ☐ $D_n = \sum_{k=1}^{n}(N_k - N_{k-1})(\sum_{i=1}^{k} P_i)$ est une sousmartingale. Correct

Solution 3. En effet

1. Non, M_k n'est pas prévisible.

2. Oui M_{k-1} est prévisible.

3. Non, puisque $-2R_k \leq 0$ finalement C_n est une surmartingale et non une sousmartingale.

4. Oui, $(\sum_{i=1}^{k} P_i)$ est prévisible positif.

Exercise 4. Soit $\mathcal{F}_n$ une filtration, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale avec $M_0 = 2$ p.s. et T un temps d'arret fini p.s.

- ☐ $\mathbb{E}(M_{n\wedge T}) = 2$ Correct
- ☐ $\mathbb{E}(M_T) = 2$ Faux
- ☐ Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |M_n| < C$ p.s, alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$ Correct
- ☐ Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|M_n|) < C$ alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$ Faux

Solution 4. En effet

1. Oui, puisque $M_{n\wedge T}$ est une martingale, on a toujours $\mathbb{E}(M_{n\wedge T}) = \mathbb{E}(M_{0\wedge T}) = \mathbb{E}(M_0) = 2$

2. Non, les hypothèses sont ici insuffisantes. Contre exemple : la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$, $M_0 = 2$ avec le temps d'arret $\min(k : M_k = 0)$. Alors $\mathbb{E}(M_T) = 0$.

3. Oui, on a $M_{n\wedge T} \to M_T$ car T est fini p.s. Donc par théorème de convergence dominé : $2 = \mathbb{E}(M_{n\wedge T}) \to \mathbb{E}(M_T)$ et donc $\mathbb{E}(M_T) = 2$.

4. Non, même exemple qu'au dessus: $\mathbb{E}(|M_{n\wedge T}|) = 2$ mais $\mathbb{E}(M_T) = 0$.

Exercise 5. Soit X_n une suite de variables aléatoires iid tel que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$ avec $p > 1/2$ et $\mathcal{F}_n$ la filtration canonique pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- ☐ $A_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est une martingale Faux
- ☐ $B_n = 10 + \sum_{k=1}^{n} X_k + (2p-1)n$ est une martingale Correct
- ☐ Soit $T = \inf[k \in \mathbb{N},\ A_k + 10 = 0]$. Alors $T < \infty$ p.s. Correct
- ☐ $\mathbb{E}(T) = \frac{10}{2p-1}$ Correct

Solution 5. En effet

1. Non, $\mathbb{E}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} X_k + \mathbb{E}(X_{n+1}) = A_n - (2p-1) < A_n$.
2. Oui, $\mathbb{E}(B_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 10 + \sum_{k=1}^{n} X_k + (2p-1)n + \mathbb{E}(X_{n+1}) + (2p-1) = B_n$
3. Oui, Pour T, on peut remarquer que $0 \leq \mathbb{E}((10 + A)_{(n+1)\wedge T}) \leq \mathbb{E}((10 + A)_{n\wedge T}) - \mathbb{P}(T > n)(2p-1)$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T > n) < \infty$.
4. De même on a en fait $\mathbb{E}((2p+1)(n\wedge T)) - \mathbb{E}((10 + A)_{n\wedge T}) = 10$ car B est une martingale. De plus

$$\mathbb{E}((2p+1)(n \wedge T)) \to (2p+1)\mathbb{E}(T)$$

par croissance monotone et $\mathbb{E}((10 + A)_{n\wedge T}) \to 0$.