

Martingales et mouvement brownien. QCM 2 :

Martingales discrètes et temps d'arrêt

March 5, 2021

Pour chacun des exercices dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier.

Exercice 1. Soit X_n des variables iid telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, et on pose $\mathcal{F}_n = \sigma((X_k)_{k \leq n})$ la filtration canonique associée à X_n . Dans ce qui suit martingales, surmartingales ou sousmartingales sont sous entendus pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- $A_n = \sum_{k=1}^n 3X_k$ est une martingale.
- $B_n = \sum_{k=2}^{n+1} kX_k$ est une martingale.
- $C_n = \sum_{k=1}^n k^2 X_k - 3n$ est une sousmartingale.
- $D_n = (A_n)^4$ est une sousmartingale.

Exercice 2. Soit \mathcal{F}_n une filtration et G_n un processus adapté.

- $T_1 = \min(k \in \mathbb{N} | G_k > 1)$ est un temps d'arrêt.
- $T_2 = \min(k > T_1 | G_k < 0)$ est un temps d'arrêt.
- $T_3 = \max(k \in \mathbb{N} | G_k = 0)$ est un temps d'arrêt.
- $T_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } G_0 \leq 0 \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$ est un temps d'arrêt.

(temps d'arrêt évidemment sous entendu pour \mathcal{F}_n .)

Exercice 3. Soit \mathcal{F}_n une filtration et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale et $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sousmartingale, soit R_n et P_n des processus prédictibles positifs.

- $A_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_k$ est une martingale.
- $B_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_{k-1}$ est une martingale.
- $C_n = -\sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})2R_k$ est une sousmartingale.
- $D_n = \sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})(\sum_{i=1}^k P_i)$ est une sousmartingale.

Exercice 4. Soit \mathcal{F}_n une filtration, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale avec $M_0 = 2$ p.s. et T un temps d'arrêt fini p.s.

- $\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = 2$
- $\mathbb{E}(M_T) = 2$
- Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |M_n| < C$ p.s, alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$
- Si $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|M_n|) < C$ alors $\mathbb{E}(M_T) = 2$

Exercice 5. Soit X_n une suite de variables aléatoires iid tel que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$ avec $p > 1/2$ et \mathcal{F}_n la filtration canonique pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- $A_n = \sum_{k=1}^n X_k$ est une martingale
- $B_n = 10 + \sum_{k=1}^n X_k + (2p - 1)n$ est une martingale
- Soit $T = \inf\{k \in \mathbb{N}, A_k = -10\}$. Alors $T < \infty$ p.s.
- $\mathbb{E}(T) = \frac{10}{2p-1}$