Feuille d'exercice 2: Espérance conditionnelle

April 5, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

Exercise 1. Soit X, Y deux variables alétoires quelconque alors :

- ☐ $3X^4 + 2$ est $\sigma(X)$ mesurable Correct
- ☐ $\sigma(X) \subset \sigma(X^2)$ Faux
- ☐ Y est $\sigma(Y^3)$ mesurable Correct
- ☐ $\sigma(X+Y, X-Y) = \sigma(X, Y)$ Correct

Solution 1. En effet

1. Oui, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable (pour la tribu borélienne), $f(X)$ est $\sigma(X)$ mesurable.
2. Non, par exemple si $X = \pm 1$, alors $X^2 = 1$ et $\sigma(X^2)$ est la tribu grossière.
3. Oui, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $[Y \leq t] = [Y^3 \leq t^3] \in \sigma(Y^3)$. Et reciproquement pour tout $u \in \mathbb{R}$ $[Y^3 \leq u] = [Y \leq \text{signe}(u)|u|^{1/3}] \in \sigma(Y)$.
4. On a immédiatement que $X+Y$ et $X-Y$ sont $\sigma(X,Y)$ mesurable. Donc $\sigma(X+Y, X-Y) \subset \sigma(X,Y)$. De même $X = \frac{1}{2}(X+Y+X-Y)$ et $Y = \frac{1}{2}(X+Y-X+Y)$ sont $\sigma(X+Y, X-Y)$ mesurable. Donc $\sigma(X,Y) \subset \sigma(X+Y, X-Y)$.

Exercise 2. On pose $f(x) = |x| - 1$ pour $x \in [-1,1]$, $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne sur $[-1,1]$ avec la mesure $\mu(dx) = \frac{1}{2}dx$ et $\mathcal{B} = \sigma([\frac{k}{13}, \frac{k+1}{13})_{k \in [-13,12] \cap \mathbb{Z}})$. On note $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$:

- ☐ $\mathbb{E}(g) = -1/2$ Correct
- ☐ g est négatif. Correct
- ☐ $\inf g \geq -1$ Correct
- ☐ g est continue sur $[-1,1]$ Faux

Solution 2. En effet

1. Oui, on a $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x| - 1 = -\frac{1}{2}$.
2. Oui $f \leq 0$ sur $[-1, 1]$, alors $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \leq 0$
3. Oui $f \geq -1$ sur $[-1, 1]$ alors $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \geq -1$
4. Non, g est une fonction étagée constante sur les intervales $[\frac{k}{13}, \frac{k+1}{13})$

Exercise 3. Soit les tribus $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

- ☐ Soit Z bornée et $\mathcal{B}$ mesurable et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.. Si $X_n \to Y$ p.s. alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})Z) \to \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})Z)$ p.s. Faux
- ☐ $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$. Correct
- ☐ Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ alors $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2) \leq \mathbb{E}((X - Y)^2)$. Correct
- ☐ Si $X \geq \epsilon > 0$ et Y est $\mathcal{B}$ mesurable. Alors $\mathbb{E}(\frac{Y}{X}|\mathcal{B}) \geq \frac{Y}{\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}$. Faux

Solution 3. En effet

- ☐ Non, Par exemple avec $Z = 1$ et $\mathcal{B} = \mathcal{F}$, il faut une condition supplémentaire (monotone, convergence dominée,...) pour que la convergence p.s implique la converge de l'espérance.
- ☐ Oui $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$ est déjà $\mathcal{B}$ mesurable puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. On a donc imédiatement $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$
- ☐ Oui il s'agit d'une propriété de la projection orthogonal: elle minimise la distance L^2 par rapport au sous espace. On peut la redémontré ainsi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-Y)^2) = &\ \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) \\ &+ \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)^2)\end{aligned}$$

  Or $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y$ est $\mathcal{B}$ mesurable et par défintion de l'espérance conditionnelle:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) \\ &\quad = \mathbb{E}(X(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) \\ &\quad = 0\end{aligned}$$

  et donc $\mathbb{E}((X - Y)^2) \geq \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2)$.
- ☐ Non, contre exemple $Y = -1$ et $\mathcal{B}$ la tribu grossière. Cependant la formule est correcte si Y est positive. En effet Puisque Y est $\mathcal{B}$ mesurable on a $\mathbb{E}(\frac{Y}{X}|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(\frac{1}{X}|\mathcal{B})$. Alors par Jensen puisque $\frac{1}{x}$ est convexe

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X}|\mathcal{B}) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}.$$

  .

Exercise 4. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux tribus indépendantes.

- ☐ Si X est $\mathcal{B}_1$ mesurable alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$ p.s. Correct
- ☐ Si X est à la fois $\mathcal{B}_1$ mesurable et $\mathcal{B}_2$ mesurable. Alors X est constante. Correct
- ☐ Pour tout Z $\sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ mesurable on a $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_1)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_2)^2)$. Faux
- ☐ Si $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$ p.s. alors X est indépendant de $\mathcal{B}_2$. Faux

Solution 4. En effet

- ☐ Oui. Puisque X est $\mathcal{B}_1$ mesurable pour tout Z $\mathcal{B}_2$ mesurable, X et Z sont indépendants. On a alors bien

  $$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)Z)$$

  et donc $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$ p.s par unicité de l'espérance conditionnelle.

- ☐ Oui. Si X est à la fois $\mathcal{B}_1$ mesurable et $\mathcal{B}_2$ mesurable alors elle est indépendante avec elle même et est donc constante. Pour la preuve soit $a \in \mathbb{R}$

  $$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(\{X \geq a\} \cap \{X \geq a\}) = \mathbb{P}(X \geq a)^2$$

  donc $\mathbb{P}(X \geq a) = 0$ ou 1.

- ☐ Non. contre exemple $Z = 1$ donnerait $1 = 1 + 1$.

- ☐ Non. Contre exemple sur $\{1, 2, 3, 4\}$ avec μ la mesure uniforme, $X(1) = 1, X(2) = -1, X(3) = X(4) = 0$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Alors on peut vérifier que $\mathbb{E}(X) = 0$ et que $\mathbb{E}(X1_{\{1,2\}}) = \mathbb{E}(X1_{\{3,4\}}) = 0$ et donc que $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = 0$. Mais que que X n'est pas indépendant de $\mathcal{B}$ puisque $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{1, 2\}) = \frac{1}{4} \neq \mu(X = 1)\mu(\{1, 2\})$