

Feuille d'exercice 2: Espérance conditionnelle

February 26, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

Exercice 1. Soit X, Y deux variables aléatoires quelconques alors :

- $3X^4 + 2$ est $\sigma(X)$ mesurable.
- $\sigma(X) \subset \sigma(X^2)$.
- Y est $\sigma(Y^3)$ mesurable.
- $\sigma(X + Y, X - Y) = \sigma(X, Y)$.

Exercice 2. On pose $f(x) = |x| - 1$ pour $x \in [-1, 1]$, \mathcal{F} est la tribu borélienne sur $[-1, 1]$ avec la mesure $\mu(dx) = \frac{1}{2}dx$ et $\mathcal{B} = \sigma([\frac{k}{13}, \frac{k+1}{13})_{k \in [-13, 12] \cap \mathbb{Z}}$. On note $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$:

- $\mathbb{E}(g) = -1/2$.
- g est négatif.
- $\inf g \geq -1$.
- g est continue sur $[-1, 1]$.

Exercice 3. Soit les tribus $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

- Soit Z bornée et \mathcal{B} mesurable et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Si $X_n \rightarrow Y$ p.s. alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})Z) \rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})Z)$ p.s.
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$.
- Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ alors $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2) \leq \mathbb{E}((X - Y)^2)$.
- Si $X \geq \epsilon > 0$ et Y est \mathcal{B} mesurable. Alors $\mathbb{E}(\frac{Y}{X}|\mathcal{B}) \geq \frac{Y}{\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}$.

Exercice 4. Soit \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux tribus indépendantes.

- Si X est \mathcal{B}_1 mesurable alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$ p.s.
- Si X est à la fois \mathcal{B}_1 mesurable et \mathcal{B}_2 mesurable. Alors X est constante.
- Pour tout $Z \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ mesurable on a $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_1)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_2)^2)$.
- Si $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$ p.s. alors X est indépendant de \mathcal{B}_2 .