# Feuille d'exercice 14: Formule d'Ito

June 16, 2021

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

**Exercise 1.** Soit $X = M + A$ une semimartingale avec $A$ un processus à variation finie et $M$ une martingale continue bornée dans $L^2$. Et $B_t$ un mouvement brownien.

- ☐ $\exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t) = 1 + \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s)dB_s$. FAUX
- ☐ $\sin(M_t) = \int_0^t \cos(M_s)dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(M_s)ds$. FAUX
- ☐ $X_t^3 - X_0^3 = 3\int_0^t X_s^2 dX_s + 3\int_0^t X_s d\langle M, M\rangle_s$ , VRAI
- ☐ $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$. VRAI

**Solution 1.** En effet

1. Non, Il manque juste le facteur $\gamma$ devant l'intégrale. Plus généralement c'est la martingale de la forme $\exp(\gamma M_t - \frac{\gamma^2}{2}\langle M, M\rangle_t) = \exp(\gamma M_0) + \gamma\int_0^t \exp(\gamma M_s - \frac{\gamma^2}{2}\langle M, M\rangle_s)dM_s$. On peut refaire le calcul avec la formule d'Ito : $f(x, y) = e^{\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}y}$, $\partial_x f = \gamma f$, $\partial_y f = -\frac{\gamma^2}{2} f$ $\partial_{xx} f = \gamma^2$ et alors

$$\begin{aligned}\exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t) &= 1 + \gamma\int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s)dB_s - \frac{\gamma^2}{2}\int \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s)ds \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2}\int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s)d\langle B, B\rangle_s. \\ &= 1 + \gamma\int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s)dB_s.\end{aligned}$$

2. Non, La formule d'Ito donne $f(x) = \sin(x)$, $\partial_x f = \cos(x)$ et $\partial_{xx} f = -\sin(x)$.

$$\sin(M_t) = \int_0^t \cos(M_s)dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(M_s)d\langle M, M\rangle_s.$$

3. Oui, Avec $f(x) = x^3$ $\partial_x f = 3x^2$ et $\partial_{xx} f = 6x$. Et on a que $\langle X, X \rangle_t = \langle M, M \rangle_t$. La formule d'Ito donne bien

$$X_t^3 - X_0^3 = 3 \int_0^t X_s^2 dX_s + 3 \int_0^t X_s d\langle M, M \rangle_s$$

4. Oui, C'est l'intégration par partie avec $X_t = B_t$ et $Y_t = t$ où $\langle X, Y \rangle_t = 0$ car $Y$ est à variation finie. On aurait pu aussi simplement utiliser la formule d'Ito avec $f(x, y) = xy$.

**Exercise 2.** Soit $X = M + A$ une semimartingale avec $A$ un processus à variation finie et $M$ une martingale continue bornée dans $L^2$. Et $f$ une fonction $\mathcal{C}^2$.

- ☐ $|M_t| = |M_0| + \int_0^t \text{sign}(M_s) dM_s$. FAUX
- ☐ $f(X_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$ est une martingale. FAUX
- ☐ $X_t^2 - M_t^2$ est une martingale. FAUX
- ☐ $X_t M_t = X_0 M_0 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s + \langle M, M \rangle_t$. FAUX

**Solution 2.** En effet

1. Non, La formule d'Ito n'est valide que pour les fonctions $\mathcal{C}^2$et ne peut pas être utilisé pour $x \to |x|$. En particulier ici le terme de droite est une martingale mais pas le terme de gauche.

2. Non, il reste le terme de varation fini de $dX_s$.

$$f(X_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dA_s$$

3. Non, Par exemple $M = 0$ et $A_t = t$.

4. Non, La formule d'Ito avec $f(x, y) = xy$ donne

$$\begin{aligned}
X_t M_t = X_0 M_0 &+ \int_0^t (M_s + A_s) dM_s + \int_0^t M_s dA_s \\
&+ \int_0^t M_s dA_s + \frac{1}{2} \int d\langle X, M \rangle_s + \frac{1}{2} \int d\langle M, X \rangle_s. \\
&= X_0 M_0 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s \\
&+ \int_0^t A_s dM_s + \langle M, M \rangle_t
\end{aligned}$$

**Exercise 3.** Soit $\boldsymbol{B}_t = (B_t, \tilde{B}_t)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$, $0 < \epsilon < 1$, $T = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t + (1, 0)\| = \epsilon\}$ et $\text{sign}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $-1$ sinon

- ☐ $\int_0^t \tilde{B}_s dB_s = B_t\tilde{B}_t - \int_0^t B_s d\tilde{B}_s$. VRAI
- ☐ $\log \|\boldsymbol{B}_{t\wedge T} + (1,0)\|$ est une martingale. VRAI
- ☐ $\int_0^t (1_{T\le t} - 1_{T>t}) dB_s$ est un mouvement brownien. VRAI
- ☐ $\int_0^t \mathrm{sign}(B_s) dB_s$ est un mouvement brownien. VRAI

**Solution 3.** En effet

1. Oui, c'est encore la formule d'intégration par partie avec $\langle B, \tilde{B}\rangle_t = 0$ car les mouvements browniens sont indépendants.
2. Oui. On peut vérfier que $h(x,y) = \log(x^2+y^2)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\partial_x h = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\partial_{xx} h = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\partial_y h = \frac{2y}{x^2+y^2}$, $\partial_{yy} h = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ et donc $\Delta h = 0$. On en déduit que $\log \|\boldsymbol{B}_{t\wedge T} + (1,0)\| = \frac{1}{2} h(\boldsymbol{B}_{t\wedge T} + (1,0))$ est une martingale.
3. Oui. On peut remarquer que
$$W = (1_{T\le t} - 1_{T>t}) \cdot B = \begin{cases} B_t & \text{si } T \ge t \\ 2B_T - B_t & \text{si } T \le t \end{cases}$$
Par principe de réflection $M$ est un mouvement brownien. Autre preuve. On a $\langle W, W\rangle_t = ((1_{T\le t} - 1_{T>t})^2 \cdot \langle B, B\rangle)_t = (1 \cdot \langle B, B\rangle)_t = t$. Par le critère de Lévy, $W$ est un mouvement brownien.
4. Oui, De même on a $\langle \mathrm{sign}(B)\cdot B, \mathrm{sign}(B)\cdot B\rangle = (\mathrm{sign}(B))^2 \cdot \langle B, B\rangle = 1 \cdot \langle B, B\rangle = \langle B, B\rangle$. Et on conclue avec le critère de Lévy.

**Exercise 4.** Soient $M_s$,$\tilde{M}_s$ des martingale continues bornée dans $L^2$ issue et $H_s, \tilde{H}_s$ des processus adaptés et borné.

- ☐ $(H\cdot M)_t^2 = \int_0^t H_s^2 dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s$. FAUX
- ☐ $\mathbb{E}((\int_0^t H_s dM_s)(\int_0^{t'} \tilde{H}_s d\tilde{M}_s)) = \mathbb{E}(\int_0^{t\wedge t'} H_s\tilde{H}_s d\langle M, \tilde{M}\rangle_s)$. VRAI
- ☐ $f((H\cdot M)_t) = f(0) + \int_0^t H_s f'((H\cdot M)_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 f''((H\cdot M)_s) d\langle M, M\rangle_s$ VRAI
- ☐ $\mathbb{E}(((H-\tilde{H})\cdot(M-\tilde{M}))_t^2) \le \mathbb{E}((H-\tilde{H})_t^2)\mathbb{E}((M-\tilde{M})_t^2)$. FAUX

**Solution 4.** En effet

1. Non, En notant $X_t = \int_0^t H_s dM_s$ on peut écrire $dX_s = H_s dM_s$ et $d\langle X, X\rangle_s = H_s^2 d\langle M, M\rangle_s$. La formule d'Ito donne alors
$$\begin{aligned} X_t^2 &= 2\int_0^t X_s dX_s + \langle X, X\rangle_t \\ &= 2\int_0^t (\int_0^s H_u dM_s) H_s dM_s + \int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s \end{aligned}$$

2. Oui. On note $N_t = \int_0^t H_s dM_s$ et $\tilde{N}_t = \int_0^t \tilde{H}_s d\tilde{M}_s$ et remarquer que $N$ et $\tilde{N}$ sont deux martingale issues de 0 . Supposons $t \leq t'$. Par définition de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(N_t \tilde{N}_{t'}) = \mathbb{E}(N_t \mathbb{E}(\tilde{N}_{t'}|\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(N_t \tilde{N}_t).$$

De plus

$$\mathbb{E}(N_t \tilde{N}_t) = \mathbb{E}(\langle N, \tilde{N}\rangle_t) = \mathbb{E}(\langle H \cdot M, \tilde{H} \cdot \tilde{M}\rangle_t) = \mathbb{E}((H\tilde{H}) \cdot \langle M, \tilde{M}\rangle_t)$$

3. Oui, comme pour le 1 pour $X = H \cdot M$, on note $dX_s = H_s dM_s$ et $d\langle X, X\rangle_s = H_s^2 d\langle M, M\rangle_s$. C'est alors la formule d'Ito.

4. Non, Par exemple on peut choisir $H_t = \tilde{H}_t$ alors le terme de droite donne 0. Alors que le terme de gauche est à priori strictement positif. (Par exemple $H_t = 1$ et $\tilde{H}_t = 1_{t \geq 1}, .$ $M = B$ un mouvement brownien et $\tilde{M} = 0$.)

**Exercise 5.** Soit $M_s$ une martingale continue uniformément bornée dans $L^2$ issue de 0 à accroissement indépendant et un processus adapté $H_s \in L^2(M)$.

- ☐ $\langle M, M\rangle_t = \mathbb{E}(M_t^2)$ p.s. VRAI
- ☐ $\mathbb{E}(\exp(\gamma(M_t - M_s))) = \exp(\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}((M_t - M_s)^2))$. VRAI
- ☐ $M_t - M_s$ est une gaussienne. VRAI
- ☐ Avec $\mathbb{E}(M_t^2)$ dérivable et dont la dérivée $F_t = \frac{d}{dt}\mathbb{E}(M_t^2) \geq \epsilon$ pour tout $t$ pour un certain $\epsilon > 0$. alors $(\frac{1}{F} \cdot M)_t$ est un mouvement brownien. FAUX

**Solution 5.** En effet

1. Oui, ceci n'est vrai bien sur qu'avec la condition "à accroissement indépendant". (voir feuilles précédente) On sait que $M_t^2 - \mathbb{E}(M_t^2)$ est une martingale. Par définition de la variation quadratique (unicité) on a $\langle M, M\rangle_t = \mathbb{E}(M_t^2)$.

2. Oui, On utilise la martingale exponentielle $\exp(\gamma M_t - \frac{\gamma^2}{2}\langle M, M\rangle_t)$. Ici cela donne

$$\mathbb{E}(e^{\gamma M_t}|\mathcal{F}_s)e^{-\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}(M_t^2)} = e^{\gamma M_s}e^{-\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}(M_s^2)}$$

donc

$$\mathbb{E}(e^{\gamma(M_t - M_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{\frac{\gamma^2}{2}(\mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2))}$$

et on peut conclure avec $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2)$ et $\mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\gamma(M_t - M_s)}|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(e^{\gamma(M_t - M_s)})$.

3. Oui, On a bien que la transformée de Laplace est de la forme $\exp(\frac{\sigma^2\gamma^2}{2})$.

4. Non. Par contre, on peut vérifier que $(\frac{1}{\sqrt{F}} \cdot M)_t$ est un mouvement brownien. $\langle \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot M, \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot M\rangle_t = \frac{1}{F}.\langle M, \cdot M\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{F_s} d\langle M, M\rangle_s = \int_0^t \frac{1}{F_s} F_s ds = t$. Et conclure avec le critère de Lévy.