Feuille d'exercice 14: Formule d'Ito

May 30, 2021

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit $X = M + A$ une semimartingale avec A un processus à variation finie et M une martingale continue bornée dans L^2. Et B_t un mouvement brownien.

- ☐ $\exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t) = 1 + \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s)dB_s$.
- ☐ $\sin(M_t) = \int_0^t \cos(M_s)dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(M_s)ds$.
- ☐ $X_t^3 - X_0^3 = 3\int_0^t X_s^2 dX_s + 3\int_0^t X_s d\langle M, M\rangle_s$,
- ☐ $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$.

Exercise 2. Soit $X = M + A$ une semimartingale avec A un processus à variation finie et M une martingale continue bornée dans L^2. Et f une fonction $\mathcal{C}^2$.

- ☐ $|M_t| = |M_0| + \int_0^t \mathrm{sign}(M_s)dM_s$.
- ☐ $f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s)d\langle X, X\rangle_s$ est une martingale.
- ☐ $X_t^2 - M_t^2$ est une martingale.
- ☐ $X_t M_t = X_0 M_0 + 2\int_0^t M_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s + \langle M, M\rangle_t$.

Exercise 3. Soit $\boldsymbol{B}_t = (B_t, \tilde{B}_t)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$, $0 < \epsilon < 1$, $T = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t + 1\| = \epsilon\}$ et $\mathrm{sign}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et -1 sinon

- ☐ $\int_0^t \tilde{B}_s dB_s = B_t\tilde{B}_t - \int_0^t B_s d\tilde{B}_s$.
- ☐ $\log\|\boldsymbol{B}_{t\wedge T} + 1\|$ est une martingale.
- ☐ $\int_0^t (1_{T\leq t} - 1_{T>t})dB_s$ est un mouvement brownien.
- ☐ $\int_0^t \mathrm{sign}(B_s)dB_s$ est un mouvement brownien.

Exercise 4. Soient M_s,$\tilde{M}_s$ des martingale continues bornée dans L^2 issue et $H_s, \tilde{H}_s$ des processus adaptés et borné.

- ☐ $(H \cdot M)_t^2 = \int_0^t H_s^2 dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s$.
- ☐ $\mathbb{E}((\int_0^t H_s dM_s)(\int_0^{t'} \tilde{H}_s d\tilde{M}_s)) = \mathbb{E}(\int_0^{t\wedge t'} H_s \tilde{H}_s d\langle M, \tilde{M}\rangle_s)$.
- ☐ $f((H\cdot M)_t) = f(0) + \int_0^t H_s f'((H\cdot M)_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 f''((H\cdot M)_s) d\langle M, M\rangle_s$
- ☐ $\mathbb{E}(((H-\tilde{H})\cdot(M-\tilde{M}))_t^2) \leq \mathbb{E}((H-\tilde{H})_t^2)\mathbb{E}((M-\tilde{M})_t^2)$.

Exercise 5. Soit M_s une martingale continue uniformément bornée dans L^2 issue de 0 à accroissement indépendant et un processus adapté $H_s \in L^2(M)$.

- ☐ $\langle M, M\rangle_t = \mathbb{E}(M_t^2)$ p.s.
- ☐ $\mathbb{E}(\exp(\gamma(M_t - M_s))) = \exp(\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}((M_t - M_s)^2))$.
- ☐ $M_t - M_s$ est une gaussienne.
- ☐ Avec $\mathbb{E}(M_t^2)$ dérivable et dont la dérivée $F_t = \frac{d}{dt}\mathbb{E}(M_t^2) \geq \epsilon$ pour tout t pour un certain $\epsilon > 0$. alors $(\frac{1}{F}\cdot M)_t$ est un mouvement brownien.