Feuille d'exercice 13: Integrale stochastique. Correction

June 16, 2021

Rappel : Pour M une martingale continue borné dans L^2, A un processus à variation fini et $H \in L^2(M)$ un processus adapté, on notera $\int_0^t H_s dM_s = (H \cdot M)_t$ l'intégrale stochastique associé à H et M et $\int_0^t H_s dA(s) = (H \cdot A)_t$ l'intégrale pour la variation finie associé à H et A.

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit A un processus à variation finie, M une martingale continue bornée dans L^2.

- ☐ Soit $F_t := \int_0^t \cos(M_s) dA(s)$. Alors $(F_t)_{t \geq 0}$ est à variation finie $p.s.$ VRAI
- ☐ $(F_t)_{t \geq 0}$ est une martingale. FAUX
- ☐ Pour tout $t \geq 0$: $\mathbb{E}(\int_0^t \sin(M_s) dM_s) = 0$ VRAI
- ☐ $\sin(M_s) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s$. FAUX

Solution 1. En effet

1. Oui, $|\cos(M_s)| \leq 1$ donc F_t est à variation finie p.s. (On a même ici que la variation de F_t est bornée par celle de A_t. En notant $\nu = \cos(M) d\mu$ on a bien que $|\nu| = |\cos(M)||\mu| \leq |\mu|$ est une mesure finie.)
2. Non. Il s'agit ici d'une intégrale à variation finie.
3. Oui, Par définition de l'intégral stochastique $N_t := \int_0^t \sin(M_s) dM_s$ est une martingale. Donc $\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(N_0) = 0$.
4. Non, On verra avec plus tard avec la formule d'Ito quelle est la formule correcte. Ici on peut se persuader que le terme de gauche n'est pas une martingale. Par exemple si $M_0 = -\frac{\pi}{2}$ et M_s non constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ alors on aurait $\mathbb{E}(\sin M_s) > -1 = \mathbb{E}(\sin M_0)$. Absurde. Autre exemple avec M_s un mouvement brownien alors on peut voir que $\sin(B_t)$ est borné mais qu'elle ne converge pas p.s

Exercise 2. Soit M_s une martingale continue uniformément bornée dans L^2 et un processus adapté $H_s \in L^2(M)$.

- ☐ $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$ est une martingale continue uniformément bornée dans L^2. VRAI
- ☐ $\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M\rangle_t)$ VRAI
- ☐ Si il existe $C \geq 0$ tel que $H_s \leq C$ pour tout $s \geq 0$ p.s alors il existe C' tel que $(H \cdot M)_s \leq C$ pour tout $s \geq 0$ p.s. FAUX
- ☐ $\langle (H \cdot M), (H \cdot M)\rangle_t$ converge p.s. et dans L^1. VRAI

Solution 2. En effet

1. Oui, C'est directement la définition de l'intégrale stochastique.
2. Oui, En ne considérant que les martingales sur l'intervale $[0, t]$ et non sur $[0, \infty)$ c'est essentiellement l'isométrie entre $\mathbb{H}$ avec la norme $\|M\|_{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{E}(M_t^2)$ et l'espace $L^2(M)$ avec la norme $\mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M\rangle_t)$.
$$\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \|(H \cdot M)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|H\|_{L^2(M)} = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M\rangle_t).$$
On aurait pu aussi utiliser la propriété $\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_t = H^2 \cdot \langle M, M\rangle_t$ et donc
$$\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}(\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_t) = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M\rangle_t).$$
3. Non, Par exemple avec M un mouvement brownien et $H_s = 1_{[0,1]}(s)$ alors $(H \cdot M)_s = B_{s \wedge 1}$ est une gaussienne de variance $s \wedge 1$ et n'est donc pas bornée.
4. Oui, Par définition $\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_t$ est monotone croissante positive. De plus on a pour tout t
$$\mathbb{E}(\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_t) \leq \mathbb{E}(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M\rangle_s) = \|H\|_{L^2(M)} < \infty$$

Exercise 3. Soit B_t un mouvement brownien. Soit $(H_s)_{s\geq 0}$ un processus adapté uniformément borné.

- ☐ $\mathbb{E}((H \cdot B)_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(|H_s|^2) ds$ VRAI
- ☐ Supposons $H_s = 1_{B_s \geq 0}$. Alors pour tout s on a $(H \cdot B)_s \geq 0$ p.s. FAUX
- ☐ $B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s$. FAUX
- ☐ $2\int_0^t B_s dB_s = B_t^2 - t$ VRAI

Solution 3. En effet

1. Oui. On a toujours

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((H\cdot B)_t^2) &= \mathbb{E}(\int_0^t H^2 d\langle B,B\rangle_s)\\ &= \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 ds)\\ &= \int_0^t \mathbb{E}(|H_s|^2)ds\end{aligned}$$

   où on utilise Fubini à la dernière ligne (car H^2 est positive).

2. Non, Par définition $(H\cdot B)$ est une martingale et donc $\mathbb{E}((H\cdot B)_s) = \mathbb{E}((H\cdot B)_0) = 0$. Supposons qu'elle soit positive, alors $(H\cdot B)_s = 0$ p.s. Absurde. (avec probabilité non nulle, $B \geq 0$ sur $[1,2]$ donc $(H\cdot B) \neq 0$ avec une probabilité non nulle.

3. Non, Par définition de l'intégrale stochastique, $\int_0^t B_s dB_s$ est une martingale et donc $\mathbb{E}(2\int_0^t B_s dB_s) = 0$ alors que $\mathbb{E}(B_t^2) = t$.

4. Oui. Lors de la construction de la variation quadratique on avait décomposé sous cette forme

$$M_t^2 = \sum_{i\leq n}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + 2\sum_{i\leq n} M_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$$

   et on avait montrer que $\sum_{i\leq n}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \to \langle M,M\rangle_t$ en probablité lorsque $n\to\infty$ avec $\max_{i\leq n}|t_i - t_{i-1}| \to 0$. On a également que

$$\sum_{i\leq n} M_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \to \int_0^t M_s dM_s.$$

   Dans le cas particulier ici $\langle B,B\rangle_t = t$ et donc

$$B_t^2 = t + 2\int_0^t B_s dB_s$$

Exercise 4. Soit a un processus à variation finie, M_s une martingale continue bornée dans L^2 et H_s un processus adapté uniformément borné ($\exists C > 0$: $|H_s| < C$ p.s pour tout $s \geq 0$) et continue. Soit $0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_{p_n}^{(n)} = t$ une segmentation de $[0,t]$. On supposera que $\max_{i\leq p_n}|t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \to 0$ lorsque $n\to\infty$. Pour tout n on choisit une suite $0 \leq y_1^{(n)} \leq \cdots \leq y_{p_n}^{(n)} \leq t$ tel que $y_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$ pour tout $i \leq p_n$.

- ☐ Quelque soit le choix des $y_i^{(n)}$ on a pour $n \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}) \to \int_0^t H_s dA(s)$$

en probabilité. VRAI

- ☐ Quelque soit le choix des $y_i^{(n)}$ on a pour $n \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \to \int_0^t H_s dM_s.$$

en probabilité. FAUX

- ☐ Si pour tout n, i $y_i^{(n)} = t_{i-1}^{(n)}$ alors $K_k := \sum_{i=0}^k H_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$ est une martingale discrète. VRAI

- ☐ Supposons M borné. Si pour tout n, i $y_i^{(n)} = t_i^{(n)}$ alors pour $n \to \infty$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1} M_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})\right) \to \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t)$$

VRAI

Solution 4. En effet

1. Oui. C'est toujours le cas pour les intégrales à variation finies. (Rappel de la preuve

$$|\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}) - \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{\tilde{y}_i^{(n)}}(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}})| \leq \sup_{i \leq n} |H_{\tilde{y}_i^{(n)}} - H_{\tilde{y}_i^{(n)}}| \sum |A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}|$$
$$\to 0$$

par uniforme continuité de H.

2. Non, Ici c'est essentielle que $y_i = t_{i-1}$. C'est l'équivalent que le processus soit prévisible lorsqu'on construit une martingale dans le cas discret. Par exemple avec $H = M = B$ un mouvement brownien

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} B_{t_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \sum_{i=0}^{p_n-1} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \to \langle B, B\rangle_t = t.$$

3. Oui Lemme Fondammental au début du cours. (Juste garder toujours cet exemple en tête pour la définition de l'intégrale stochastique).

4. Oui, Puisque $\sum_{i=0}^{k} M_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$ est une martingale. $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{k} M_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})) = 0$ et alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1} M_{t_i}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})\right) \\ &= \mathbb{E}((M_t - M_0)^2) \\ &= \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t)\end{aligned}$$

Exercise 5. Soient M and N deux martingales continues bornées dans L^2 et K, H des processus adaptés et bornés.

- ☐ $(K \cdot (H \cdot M))_t = (H \cdot (K \cdot M))_t$ VRAI
- ☐ $\langle H \cdot M, N\rangle_t = \langle M, H \cdot N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s$ VRAI
- ☐ $\langle H \cdot (M + N), K \cdot N\rangle_t = (HK) \cdot \langle M, N\rangle_t + (HK) \cdot \langle N, N\rangle_t$ VRAI
- ☐ Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien alors $\langle B, B \cdot B\rangle_t = tB_t$ FAUX

Solution 5. En effet

1. Oui. On a

$$(K \cdot (H \cdot M))_t = ((KH) \cdot M)_t = (H \cdot (K \cdot M))_t .$$

2. Oui cela se note également

$$\langle H \cdot M, N\rangle_t = H \cdot \langle M, N\rangle_t = \langle M, H \cdot N\rangle_t$$

3. Oui, c'est simplement que $H \cdot (M + N) = H \cdot M + H \cdot N$ puis par bilinéarité du crochet de martingale.

4. Non Ici on a

$$\langle B, B \cdot B\rangle_t = B \cdot \langle B, B\rangle_t = \int_0^t B_s ds$$