

## Feuille d'exercice 13: Intégrale stochastique

May 23, 2021

Rappel : Pour  $M$  une martingale continue borné dans  $L^2$ ,  $A$  un processus à variation fini et  $H \in L^2(M)$  un processus adapté, on notera  $\int_0^t H_s dM_s = (H \cdot M)_t$  l'intégrale stochastique associé à  $H$  et  $M$  et  $\int_0^t H_s dA(s) = (H \cdot A)_t$  l'intégrale pour la variation finie associé à  $H$  et  $A$ .

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

**Exercice 1.** Soit  $A$  un processus à variation finie,  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ .

- Soit  $F_t := \int_0^t \cos(M_s) dA(s)$ . Alors  $(F_t)_{t \geq 0}$  est à variation finie p.s.
- $(F_t)_{t \geq 0}$  est une martingale.
- Pour tout  $t \geq 0$ :  $\mathbb{E}(\int_0^t \sin(M_s) dM_s) = 0$
- $\sin(M_s) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s$ .

**Exercice 2.** Soit  $M_s$  une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$  et un processus adapté  $H_s \in L^2(M)$ .

- $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$  est une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$ .
- $\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M \rangle_t)$
- Si il existe  $C \geq 0$  tel que  $H_s \leq C$  pour tout  $s \geq 0$  p.s alors il existe  $C'$  tel que  $(H \cdot M)_s \leq C'$  pour tout  $s \geq 0$  p.s.
- $\langle (H \cdot M), (H \cdot M) \rangle_t$  converge p.s. et dans  $L^1$ .

**Exercice 3.** Soit  $B_t$  un mouvement brownien. Soit  $(H_s)_{s \geq 0}$  un processus adapté uniformément borné.

- $\mathbb{E}((H \cdot B)_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(|H_s|^2) ds$
- Supposons  $H_s = 1_{B_s \geq 0}$ . Alors pour tout  $s$  on a  $(H \cdot B)_s \geq 0$  p.s.
- $B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s$ .

$$\square 2 \int_0^t B_s dB_s = B_t^2 - t$$

**Exercice 4.** Soit  $a$  un processus à variation finie,  $M_s$  une martingale continue bornée dans  $L^2$  et  $H_s$  un processus adapté uniformément borné ( $\exists C > 0 : |H_s| < C$  p.s pour tout  $s \geq 0$ ) et continue. Soit  $0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{p_n}^{(n)} = t$  une segmentation de  $[0, t]$ . On supposera que  $\max_{i \leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Pour tout  $n$  on choisit une suite  $0 \leq y_1^{(n)} \leq \dots \leq y_{p_n}^{(n)} \leq t$  tel que  $y_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$  pour tout  $i \leq p_n$ .

$\square$  Quelque soit le choix des  $y_i^{(n)}$  on a pour  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}} (A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}) \rightarrow \int_0^t H_s dA(s)$$

en probabilité.

$\square$  Quelque soit le choix des  $y_i^{(n)}$  on a pour  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \rightarrow \int_0^t H_s dM_s.$$

en probabilité.

$\square$  Si pour tout  $n, i$   $y_i^{(n)} = t_{i-1}^{(n)}$  alors  $K_k := \sum_{i=0}^k H_{y_i^{(n)}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$  est une martingale discrète.

$\square$  Supposons  $M$  borné. Si pour tout  $n, i$   $y_i^{(n)} = t_i^{(n)}$  alors pour  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{p_n-1} M_{y_i^{(n)}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \right) \rightarrow \mathbb{E} \langle M, M \rangle_t$$

**Exercice 5.** Soient  $M$  and  $N$  deux martingales continues bornées dans  $L^2$  et  $K, H$  des processus adaptés et bornés.

$$\square (K \cdot (H \cdot M))_t = (H \cdot (K \cdot M))_t$$

$$\square \langle H \cdot M, N \rangle_t = \langle M, H \cdot N \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s$$

$$\square \langle H \cdot (M + N), K \cdot N \rangle_t = (HK) \cdot \langle M, N \rangle_t + (HK) \cdot \langle N, N \rangle_t$$

$$\square \text{ Si } (B_t)_{t \geq 0} \text{ est un mouvement brownien alors } \langle B, B \cdot B \rangle_t = tB_t$$