Feuille d'exercice 12, Variation quadratique martingale continue. Correction

June 9, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

Par défaut on supposera que les martingales satisfont $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout $t \geq 0$.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements brownien indépendant et $(M_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ deux martingales continue issues de 0.

- ☐ Si $\langle M, M\rangle = \langle N, N\rangle$ p.s alors $M = N$ p.s. FAUX
- ☐ $\lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^n B_{\frac{k}{n}}(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) - \sum_{k=1}^n B_{\frac{k-1}{n}}(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})| = 1$. VRAI
- ☐ $\langle B, \tilde{B}\rangle_t = 0$. VRAI
- ☐ $\langle 2B - \tilde{B}, 2B - \tilde{B}\rangle_t = 3t$. FAUX

Solution 1. En effet,

1. Non, On peut choisir $M = B$ et $N = \tilde{B}$ alors $\langle M, M\rangle_t = \langle N, N\rangle_t = t$ p.s pour tout t.
2. Oui
$$\lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})| = \langle B, B\rangle_1 = 1$$
en probabilité.
3. Oui, on peut vérifier que $B_t\tilde{B}_t$ est déjà une martingale.
4. Non, On a
$$\begin{aligned}\langle 2B - \tilde{B}, 2B - \tilde{B}\rangle_t &= 4\langle B, B\rangle_t - 4\langle B, \tilde{B}\rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{B}\rangle_t \\ &= 5t.\end{aligned}$$

Exercise 2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue, X_t un processus continue et $S_\epsilon = \inf\{t \geq 0, \langle M, M\rangle_t \geq \epsilon\}$.

- ☐ Si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} |X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$ alors $X_1 = X_0$ p.s FAUX
- ☐ $\mathbb{E}((M_{t\wedge S_\epsilon} - M_0)^2) \leq \epsilon$ VRAI
- ☐ $\{\langle M, M\rangle_t = 0\} \subset \{M_t = M_0\}$ p.s. VRAI
- ☐ $\{M_t = M_0\} \subset \{\langle M, M\rangle_t = 0\}$ p.s. FAUX

Solution 2. En effet,

1. Non, ici on a simplement que la variation quadratique de X est nulle. C'est par exemple le cas pour X à variation finie.
2. Oui $(M_t - M_0)^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale. Donc avec S_ϵ un temps d'arret on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}((M_{t\wedge S_\epsilon} - M_0)^2) &= \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{t\wedge S_\epsilon})\\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$
par définition de S_ϵ.
3. Oui, (rappel notation l'ensemble ici est $\{\omega \in \Omega, \langle M, M\rangle_t(\omega) = 0\} \subset \Omega$). On réécrit $\{\langle M, M\rangle_t = 0\} = \cap_{\epsilon>0}\{\langle M, M\rangle_t \leq \epsilon\} = \cap_{\epsilon>0}\{S_\epsilon \geq t\}$. Fixons $\eta, \epsilon > 0$. Alors par la question précédent
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{t \leq S_\epsilon\} \cap \{|(M_t - M_0| > \eta\}) &\leq \frac{1}{\eta^2}\mathbb{E}(1_{t\leq S_\epsilon}(M_t - M_0)^2)\\ &\leq \frac{1}{\eta^2}\mathbb{E}((M_{t\wedge S_\epsilon} - M_0)^2)\\ &\leq \frac{\epsilon}{\eta^2}.\end{aligned}$$
On a alors que $\mathbb{P}(\cap_{\epsilon>0}\{t \leq S_\epsilon\} \cap \{|(M_t - M_0| > \eta\}) = 0$ quelque soit $\eta > 0$ et on peut conclure $\mathbb{P}(\{\langle M, M\rangle_t = 0\} \cap \{|(M_t - M_0| > 0\}) = 0$.
4. Non, Par exemple soit B un mouvement brownien et $T = \inf\{t \geq 1, B_t = 0\}$. Alors $M_t := B_{t\wedge T}$ est une martingale continue. On a que $\mathbb{P}(M_2 = 0) = \mathbb{P}(T \leq 2) > 0$. Donc $\mathbb{P}(\{M_2 = M_0\}) > 0$. Par contre $\langle M, M\rangle_2 = \langle B, B\rangle_{2\wedge T} = 2 \wedge T \geq 1$. Donc $\mathbb{P}(\{\langle M, M\rangle_2 = 0\}) = 0$. En particulier on ne peut pas avoir $\{M_2 = M_0\} \subset \{\langle M, M\rangle_2 = 0\}$.

Exercise 3. Soient $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ des semimartingales continues issue de 0.

- ☐ $\mathbb{E}(X_1 Y_1) = \mathbb{E}(\langle X, Y\rangle_1)$. FAUX
- ☐ Si pour tout $s \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\lfloor ns\rfloor} |Y_{\frac{k}{n}} - Y_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$ alors Y est à variation finie. VRAI
- ☐ Si il existe A un processus à variation finie tel que $X = Y + A$ alors $\langle X, Y\rangle = \langle X, X\rangle = \langle Y, Y\rangle$. VRAI

☐ Si X, Y sont des matingales avec $\langle X, Y\rangle_t = 0$ alors X et Y sont indépendantes. FAUX

Solution 3. En effet,

1. Non, Ceci n'est vrai que pour des martingales (ie si X et Y n'ont pas de composante à variation finie). Par exemple si $X = A$ et $Y = \tilde{A}$ deux processus à variation finie. Alors $\langle X, Y\rangle = 0$ mais à priori $\mathbb{E}(X_t Y_t) \neq 0$.

2. Oui, On écrit $Y = M + A$ avec M une martingale continue et A à variation fini. On a que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\lfloor ns\rfloor} |Y_{\frac{k}{n}} - Y_{\frac{k-1}{n}}|^2) = \langle Y, Y\rangle_s = \langle M, M\rangle_s = 0$$
pour tout s. Donc $M = 0$ p.s (voir exercice précédent ou utiliser que $\mathbb{E}(M_s^2) = 0$). Donc $Y = A$ est à variation finie.

3. Oui, On a ici que $X = M + \tilde{A}$ et $Y = M + \tilde{A} + A$ avec M une martingale continue et $A, \tilde{A}$ à variation finie. Alors
$$\langle M, M\rangle = \langle X, Y\rangle = \langle X, X\rangle = \langle Y, Y\rangle.$$

4. Non, On peut construire le contre-exemple suivant. Soit $B, \tilde{B}$ deux mouvements browniens indépendants et X une bernoulli : $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{F}_t = \sigma((B_s)_{s\le t}, (\tilde{B}_s)_{s\le t}, X)$, en particulier X est $\mathcal{F}_0$ mesurable. On pose $M_t = XB_t$ et $\tilde{M}_t = X\tilde{B}_t$ alors on vérifie que M et $\tilde{M}$ sont des martingale et que $\langle M, \tilde{M}\rangle = 0$ p.s. Par contre pour tout $t > 0$ on a
$$\{M_t = 0\} = \{X = 0\} = \{\tilde{M}_t = 0\}$$
p.s. Les martingale M et $\tilde{M}$ ne sont donc pas indépendantes.

Exercise 4. Soit $(M_t)_{t\ge 0}$ une martingale continue avec $M_0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = \inf\{t \ge 0 : |M_t| \ge n\}$ et $S_n = \inf\{t \ge 0 : \langle M, M\rangle_t = n\}$.

☐ $\{\lim_{t\to\infty} M_t$ existe et est finie$\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n = \infty\}$. VRAI

☐ $\{T_n = \infty\} \subset \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\}$ p.s. VRAI

☐ Pour tout n, $\mathbb{E}(M^2_{t\wedge S_n}) < \infty$. VRAI

☐ $\{\lim_{t\to\infty} M_t$ existe et est finie$\} = \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\}$ p.s VRAI

Solution 4. En effet,

1. Oui, Puisque M est continue,
$$\begin{aligned}\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\} &\subset \{\exists n \in \mathbb{N}, \forall t \ge 0, |M_t| \le n\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n = \infty\}\end{aligned}$$

Inversement soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $M_{t\wedge T_n}$ est une martingale uniformément bornée. Donc elle converge p.s. Donc

$$\begin{aligned}\{T_n=\infty\}\cap\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\} &= \{T_n=\infty\}\cap\{\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge T_n} \text{ existe et est finie}\}\\ &= \{T_n=\infty\}\end{aligned}$$

c'est à dire $\{T_n=\infty\}\subset\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$ et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n=\infty\}\subset\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$.

2. Oui On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1_{T_n=\infty}\langle M,M\rangle_\infty) &= \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(1_{T_n=\infty}\langle M,M\rangle_{t\wedge T_n})\\ &\le \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(\langle M,M\rangle_{t\wedge T_n})\\ &= \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(M^2_{t\wedge T_n})\\ &\le n^2\\ &< \infty\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(\{T_n=\infty\}\cap\{\langle M,M\rangle_\infty=\infty\})=0$.

3. Oui, on a directement que

$$\mathbb{E}(M^2_{t\wedge S_n})=\mathbb{E}(\langle M,M\rangle_{t\wedge S_n})\le n<\infty.$$

4. Oui, Avec la partie 1 et 2 on a que $\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\}\subset\{\langle M,M\rangle_\infty<\infty\}$. Montrons l'autre inclusion. On a

$$\{\langle M,M\rangle_\infty<\infty\}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\langle M,M\rangle_\infty<n\}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\{S_n=\infty\}.$$

On a que $M_{t\wedge S_n}$ est une martingale uniformément bornée dans L^2 donc elle converge p.s. (et dans L^2). Alors comme dans 1,

$$\begin{aligned}\{S_n=\infty\}\cap\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\} &= \{S_n=\infty\}\cap\{\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge S_n} \text{ existe et est finie}\}\\ &= \{S_n=\infty\}\end{aligned}$$

c'est à dire $\{S_n=\infty\}\subset\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$ et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{S_n=\infty\}\subset\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$.