Feuille d'exercice 12, Variation quadratique martingale continue.

May 16, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

Par défaut on supposera que les martingales satisfont $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout $t \geq 0$.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements brownien indépendant et $(M_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ deux martingales continue issues de 0.

- ☐ Si $\langle M, M\rangle = \langle N, N\rangle$ p.s alors $M = N$ p.s.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^n B_{\frac{k}{n}}(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) - \sum_{k=1}^n B_{\frac{k-1}{n}}(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})| = 1$.
- ☐ $\langle B, \tilde{B}\rangle_t = 0$.
- ☐ $\langle 2B - \tilde{B}, 2B - \tilde{B}\rangle_t = 3t$.

Exercise 2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue, X_t un processus continue et $S_\epsilon = \inf\{t \geq 0, \langle M, M\rangle_t \geq \epsilon\}$.

- ☐ Si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n |X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$ alors $X_1 = X_0$ p.s
- ☐ $\mathbb{E}((M_{t\wedge S_\epsilon} - M_0)^2) \leq \epsilon$
- ☐ $\{\langle M, M\rangle_t = 0\} \subset \{M_t = M_0\}$ p.s.
- ☐ $\{M_t = M_0\} \subset \{\langle M, M\rangle_t = 0\}$ p.s.

Exercise 3. Soient $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ des semimartingales continues issue de 0.

- ☐ $\mathbb{E}(X_1 Y_1) = \mathbb{E}(\langle X, Y\rangle_1)$.
- ☐ Si pour tout $s \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\lfloor ns\rfloor} |Y_{\frac{k}{n}} - Y_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$ alors Y est à variation finie.
- ☐ Si il existe A un processus à variation finie tel que $X = Y + A$ alors $\langle X, Y\rangle = \langle X, X\rangle = \langle Y, Y\rangle$.

- ☐ Si X, Y sont des matingales avec $\langle X, Y\rangle_t = 0$ alors X et Y sont indépendantes.

Exercise 4. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue avec $M_0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ et $S_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t = n\}$.

- ☐ $\{\lim_{t\to\infty} M_t$ existe et est finie$\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n = \infty\}$.
- ☐ $\{T_n = \infty\} \subset \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\}$ p.s.
- ☐ Pour tout n, $\mathbb{E}(M_{t\wedge S_n}^2) < \infty$.
- ☐ $\{\lim_{t\to\infty} M_t$ existe et est finie$\} = \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\}$ p.s