Feuille d'exercice 11, Variation finie et p-variation.

June 9, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit a une fonction à variation finie sur $[0,1]$ et g une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et b une fonction bornée alors

- ☐ $g \circ a$ est à variation fini. VRAI
- ☐ $h(t) := \int_0^t g(s)da(s)$ est à variation fini (sur $[0,1]$). VRAI
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) = \int_0^1 g(s)da(s)$ VRAI
- ☐ $\exists C > 0$, $|\sum_{k=1}^n b(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) - \sum_{k=1}^n b(\frac{k-1}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. VRAI

Solution 1. En effet,

1. Oui, Puisque a est à variation finie, l'image de a sur $[0,1]$ est contenue dans un compact. Puisque g est $\mathcal{C}^1$, alors g est Lipschitz sur $\mathrm{Im}(a)$. Soit κ ce coefficient de Lipschitz et C une borne pour la variation de a. On a
$$\sum_{i\leq n} |g(a(t_i)) - g(a(t_{i-1}))| \leq \sum_{i\leq n} \kappa |a(t_i) - a(t_{i-1})| \leq \kappa C$$
pour tout division en sous intervales $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$.

2. Oui on note $\mu = \mu_+ - \mu_-$ la mesure associé l'intégrale de a où μ_+, μ_- sont des mesure positives fini et $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. Pour tout $s < t$ on a
$$|h(t) - h(s)| \leq \int_s^t |g(s)| d|\mu|(s)$$
et donc
$$\sum_{i\leq n} |h(t_i) - h(t_{i-1})| \leq \sum_{i\leq n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(s)| d|\mu|(s) \leq \|g\|_{L^\infty([0,1])} \int_0^1 d|\mu|(s).$$
On peut aussi directement dire que si $|\mu|$ est une mesure fini et g borné alors $|g||\mu|$ est une mesure finie.

3. Oui C'est une proposition du cours avec g est continue et a à variation fini. (Pour refaire la preuve avec $g^{(n)} = \sum g(\frac{k}{n}) 1_{[\frac{k-1}{n},n)}$ la fonction constante par morceau qui approxime g. Alors
$$\sum_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) = \int_0^1 g^{(n)}(s)da(s).$$
Et on peut conclure par convergence dominé puisque $g^{(n)}(s) \to g(s)$ pour tout $s \in [0,1]$ lorsque $n \to \infty$ par continuité.)

4. Oui
$$|\sum_{k=1}^{n} b(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) - \sum_{k=1}^{n} b(\frac{k-1}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))| \leq 2\|b\|_\infty C$$
ou C est une borne pour la variation de a.

Exercise 2. Soit a et b des fonctions sur $[0,1]$ respectivement $\frac{1}{p}$ Holder et $\frac{1}{q}$ Holder.

- ☐ a est à p-variation. VRAI
- ☐ Si $p < q$ alors a est de q-variation nulle. VRAI
- ☐ Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ alors $\sum_{k=1}^{n} (a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})(b(\frac{k}{n}) - b(\frac{k-1}{n})) \to 0$. VRAI
- ☐ Soit $(t_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N},k\leq n}$ tel que $\frac{k-1}{n} \leq t_k^{(n)} \leq \frac{k}{n}$. Alors si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ FAUX
$$\sum_{k=1}^{n} (a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))b(t_k^{(n)})$$
admet une limite pour $n \to \infty$ indépendamment du choix de $(t_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N},k\leq n}$.

Solution 2. En effet,

1. Oui, Soit α tel que pour tout $s < t \in [0,1]$ $\frac{|a(t)-a(s)|}{(t-s)^{\frac{1}{p}}} \leq \alpha$. Alors
$$\sum |a(t_i) - a(t_{i-1})|^p \leq \sum_{i\leq n} \alpha^p |(t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{p}}|^p \leq \alpha^p$$
quelque soit $0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ donc a est à $p-$variation.

2. Oui,
$$\begin{aligned}\sum |a(t_i) - a(t_{i-1})|^q &\leq \sum_{i\leq n} \alpha^q |t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{p}}|^p |t_i - t_{i-1}|^{(q-p)} \\ &\leq \alpha^q \sup_{i\leq n} |t_i - t_{i-1}|^{q-p} \times 1 \\ &\to 0\end{aligned}$$
lorsque $n \to \infty$ avec $\sup_{i\leq n} |t_i - t_{i-1}| \to 0$.

3. Oui, Ceci est toujours vrai pour a et b à $p-$variation et $q-$variation respectivement avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. Ici on peut aussi vérifier directement en notant β tel que $\forall s<t\in[0,1]$, $\frac{|b(t)-b(s)|}{(t-s)^{\frac{1}{q}}}\leq\beta$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a(\frac{k}{n})-a(\frac{k-1}{n})(b(\frac{k}{n})-b(\frac{k-1}{n}))&\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha}{n^{\frac{1}{p}}}\times\frac{\beta}{n^{\frac{1}{q}}}\\&=\frac{\alpha\beta}{n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}}\times 1\\&\to 0\end{aligned}$$

lorsque $n\to\infty$.

4. Non dans le cas d'égalité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ce n'est pas vrai en général. Construire un contre exemple est un peu difficile L'exemple le plus simple aurait été de prendre le mouvement avec $p=q=2$ et vérifier que $\sum_{k=1}^{n}(B_{\frac{k}{n}}-B_{\frac{k-1}{n}})B_{\frac{k}{n}}$ et $\sum_{k=1}^{n}(B_{\frac{k}{n}}-B_{\frac{k-1}{n}})B_{\frac{k-1}{n}}$ n'ont pas la même limite. Malheureusement B n'est pas $\frac{1}{2}-$Holder et il faut donc travailler un peu plus.

Exercise 3. Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables iid avec $\mathbb{E}(Y_i)=0$ et $\mathbb{E}(Y_i^2)=1$. On pose $S_n^{(N)}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{n}Y_i$. Soit $\epsilon>0$.

- ☐ $\exists M$, $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{N}|S_k^{(N)}-S_{k-1}^{(N)}|<M)\geq 1-\epsilon$ pour tout N suffisament grand. FAUX
- ☐ $\exists M$, $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{N}|S_k^{(N)}-S_{k-1}^{(N)}|^2<M)\geq 1-\epsilon$ pour tout N suffisament grand. VRAI
- ☐ $K_n:=(S_n^{(N)})^2-\mathbb{E}((S_n^{(N)})^2)$ est une martingale. VRAI
- ☐ Pour $N\to\infty$, Pour tout $t_1<t_2<\cdots<t_n$ $((S_{\lfloor Nt_i\rfloor}^{(N)})^2-\mathbb{E}((S_{\lfloor Nt_i\rfloor}^{(N)})^2)_{i\leq n}$ converge en loi vers $(B_{t_i}^2-t_i)_{i\leq n}$. VRAI

Solution 3. En effet,

1. Non, On a

$$\sum_{k=1}^{N}|S_k^{(N)}-S_{k-1}^{(N)}|=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}|Y_k|\sim\sqrt{N}\mathbb{E}(|Y_1|)\to\infty$$

p.s par la loi forte des grands nombres. Donc pour tout $M>0$ $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{N}|S_k^{(N)}-S_{k-1}^{(N)}|<M)\to 0$.

2. Oui, Ici encore avec la loi forte des grands nombres

$$\sum_{k=1}^{N}|S_k^{(N)}-S_{k-1}^{(N)}|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|Y_k|^2\to\mathbb{E}(|Y_1|^2)$$

p.s. Donc il suffit de choisir $M>1$.

3. Oui, C'est un cas déjà rencontré dans un autre TD : $S_n^{(N)}$ est à accroissement indépendant et de moyenne nulle. On peut le revérifier à la main $\mathbb{E}((S_n^{(N)})^2) = \frac{n}{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((S_n^{(N)})^2|\mathcal{F}_{n-1}) &= (S_{n-1}^{(N)})^2 + 2(S_{n-1}^{(N)})\mathbb{E}(\frac{Y_n}{\sqrt{N}}|\mathcal{F}_{n-1}) + \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (S_{n-1}^{(N)})^2 + \frac{1}{N}\end{aligned}$$

Et on a donc bien $\mathbb{E}(K_n|\mathcal{F}_{n-1}) = K_{n-1}$.

4. Oui On a bien que $\mathbb{E}((S_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)})^2) = \frac{\lfloor Nt \rfloor}{N}$ converge vers t (uniformement sur $\mathbb{R}$ et de manière déterministe). On sait que $(S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})_{i \leq n}$ converge vers $(B_{t_i})_{i\leq n}$ en loi. Donc $((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})^2)_{i\leq n}$ converge vers $(B_{t_i}^2)_{i\leq n}$ en loi. (Rappel de la preuve de cette propriété : Pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})_{i\leq n})) \to \mathbb{E}(f((B_{t_i})_{i\leq n}))$$

lorsque $n \to \infty$. Soit g une fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On pose $f(x) = g(x^2)$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})_{i\leq n}^2)) &= \mathbb{E}(f((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})_{i\leq n})) \\ &\to \mathbb{E}(f((B_{t_i})_{i\leq n})) \\ &= \mathbb{E}(g((B_{t_i})_{i\leq n}))\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$.)

Exercise 4. Soit B_t et $\tilde{B}_t$ deux mouvements brownien indépendant et A_t un processus à variation fini.

- ☐ B_t^2 est à variation fini. FAUX
- ☐ Pour $p > 2$, $\sum_{k=1}^n |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|^p \to 0$ en proba. VRAI
- ☐ $\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B_{\frac{k}{n}}} - \tilde{B_{\frac{k-1}{n}}}) \to 0$ en proba. VRAI
- ☐ $K_t := \int_0^t B_s dA_s$ est un processus à variation fini. VRAI

Solution 4. En effet,

1. Non, Si B_t^2 était à variation fini alors $B_t^2 - t$ aussi et puisse que c'est une martingale continue on aurait que $B_t^2 - t$ est constant. Absurde.

2. Oui,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{k=1}^n |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|^p) &= n\mathbb{E}(|B_{\frac{1}{n}}|^p) \\ &= n^{1-p/2}\mathbb{E}(|B_1|^p) \\ &\to 0\end{aligned}$$

où on a utilisé que $(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})$ a la même loi que $B_{\frac{1}{n}}$ qui a la même loi que $\frac{1}{\sqrt{n}}B_1$. On a la convergence dans L^1 et donc la convergence en probabilité.

3. Oui, Puisque B et $\tilde{B}$ sont indépendants

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t\tilde{B}_t|\mathcal{F}_s) &= B_s\tilde{B}_s + \mathbb{E}((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s)\tilde{B}_s \\ &\quad + \mathbb{E}((\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)|\mathcal{F}_s)B_s + \mathbb{E}((B_t - B_s)(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)|\mathcal{F}_s) \\ &= B_s\tilde{B}_s + \mathbb{E}((B_t - B_s)(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)) \\ &= B_s\tilde{B}_s\end{aligned}$$

et donc que $B_t\tilde{B}_t$ est une martingale. On a alors que $\langle B, \tilde{B}\rangle_t = 0$ et donc que

$$\sum_{k=1}^{n}(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B_{\frac{k}{n}}} - \tilde{B_{\frac{k-1}{n}}}) \to 0$$

en probabilité. Autre preuve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\sum_{k=1}^{n}(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B_{\frac{k}{n}}} - \tilde{B_{\frac{k-1}{n}}}))^2) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(((B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B_{\frac{k}{n}}} - \tilde{B_{\frac{k-1}{n}}}))^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}((B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})^2)\mathbb{E}((\tilde{B_{\frac{k}{n}}} - \tilde{B_{\frac{k-1}{n}}})^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} \\ &\to 0\end{aligned}$$

Donc converge vers 0 dans L^2 donc en probabilité.

4. Oui, B_t est continue donc borné sur $[0,1]$ et donc $\int_0^1 B_s dA_s$ est à variation finie sur $[0,1]$.