Feuille d'exercice 11, Variation finie et p-variation.

May 11, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit a une fonction à variation fini sur $[0,1]$et g une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et b une fonction bornée alors

- ☐ $g \circ a$ est à variation fini.
- ☐ $h(t) := \int_0^t g(s)da(s)$ est à variation fini.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) = \int_0^1 g(s)da(s)$
- ☐ $\exists C > 0$, $|\sum_{k=1}^n b(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) - \sum_{k=1}^n b(\frac{k-1}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercise 2. Soit a et b des fonctions sur $[0,1]$ respectivement $\frac{1}{p}$ Holder et $\frac{1}{q}$ Holder.

- ☐ a est à p-variation.
- ☐ Si $p < q$ alors a est de q-variation nulle.
- ☐ Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ alors $\sum_{k=1}^n (a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})(b(\frac{k}{n}) - b(\frac{k-1}{n})) \to 0$.
- ☐ Soit $(t_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N},k\leq n}$ tel que$\frac{k-1}{n} \leq t_k^{(n)} \leq \frac{k}{n}$. Alors si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{k=1}^n (a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))b(t_k^{(n)})$$

  admet une limite pour $n \to \infty$ indépendamment du choix de $(t_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N},k\leq n}$.

Exercise 3. Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables iid avec $\mathbb{E}(Y_i) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_i^2) = 1$. On pose $S_n^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n Y_i$. Soit $\epsilon > 0$.

- ☐ $\exists M$, $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}| < M) \geq 1 - \epsilon$ pour tout N suffisament grand.

- ☐ $\exists M$, $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{N} |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}|^2 < M) \geq 1 - \epsilon$ pour tout N suffisament grand.
- ☐ $K_n := (S_n^{(N)})^2 - \mathbb{E}((S_n^{(N)})^2)$ est une martingale.
- ☐ Pour $N \to \infty$, Pour tout $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ $((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})^2 - \mathbb{E}((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})^2)_{i \leq n}$ converge en loi vers $(B_{t_i}^2 - t_i)_{i \leq n}$.

Exercise 4. Soit B_t et $\tilde{B}_t$ deux mouvements brownien indépendant et A_t un processus à variation fini.

- ☐ B_t^2 est à variation fini.
- ☐ Pour $p > 2$, $\sum_{k=1}^{n} |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|^p \to 0$ en proba.
- ☐ $\sum_{k=1}^{n} (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B_{\frac{k}{n}}} - \tilde{B_{\frac{k-1}{n}}}) \to 0$ en proba.
- ☐ $K_t := \int_0^t B_s dA_s$ est un processus à variation fini.