Feuille d'exercice 10, Martingales continues. Correction

June 9, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $a > 0 > b$ et $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ et $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$.

- ☐ $T_a \wedge T_b < \infty$ p.s. VRAI
- ☐ $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{|b|}{a+|b|}$. VRAI
- ☐ $\mathbb{E}(B^2_{T_a \wedge T_b}) = \mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$ VRAI
- ☐ $\mathbb{E}(T_a \wedge T_b) = |b|a$ VRAI

Solution 1. En effet:

1. Oui, Le mouvement brownien ne reste pas borné

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_a \wedge T_b \geq t) &= \mathbb{P}(\forall s \leq t : b < B_s < a) \\
&\leq \mathbb{P}(b < B_t < a) \\
&= \mathbb{P}(\frac{b}{\sqrt{t}} < B_1 < \frac{a}{\sqrt{t}}) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

lorsque $t \to \infty$.

2. Oui, puisque B_t est une martingale, pour tout t, $0 = \mathbb{E}(B_0) = \mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b \wedge t})$. Puisque $T_a \wedge T_b < \infty$ p.s et $|B_{T_a \wedge T_b \wedge t}| \leq \max a, |b|$, par convergence dominée

$$0 = \mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b}) = a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b(1 - \mathbb{P}(T_a < T_b))$$

et donc $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{|b|}{a+|b|}$.

3. Oui $B_t^2 - t$ est une martingale donc pour tout $t \geq 0$,

$$0 = \mathbb{E}(B_0^2 - 0) = \mathbb{E}(B^2_{T_a \wedge T_b \wedge t}) - \mathbb{E}(T_a \wedge T_b \wedge t).$$

On a de plus que $\mathbb{E}(B^2_{T_a\wedge T_b\wedge t}) \to \mathbb{E}(B^2_{T_a\wedge T_b})$ lorsque $t\to\infty$ par convergence dominée avec $|B_{T_a\wedge T_b\wedge t}|^2 \leq (\max a, |b|)^2$ et $\mathbb{E}(T_a\wedge T_b\wedge t) \to \mathbb{E}(T_a\wedge T_b)$ par croissance monotone. Conclusion $\mathbb{E}(B^2_{T_a\wedge T_b}) = \mathbb{E}(T_a\wedge T_b)$.

4. À partir des questions précédentes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_a\wedge T_b) &= a^2\mathbb{P}(T_a<T_b) + b^2(1-\mathbb{P}(T_a<T_b))\\ &= \frac{a^2|b|}{a+|b|} + \frac{a|b|^2}{a+|b|}\\ &= a|b|.\end{aligned}$$

Exercise 2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue positive tel que $M_t\to 0$ p.s, $M_0 = a > 0$ et on note $T_b = \inf\{t : M_t = b\}$ pour $b\geq 0$.

- ☐ Pour tout $b>0$, $T_b<\infty$ p.s, FAUX
- ☐ Pour tout $b>0$, $\mathbb{E}(M_{T_b}) = a$, FAUX
- ☐ Soit $b>a$ alors $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq b) = \frac{a}{b}$, VRAI
- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0}(B_t-\mu t)\geq b) = e^{-2\mu b}$. VRAI

Solution 2. En effet:

1. Non, Pour $b>a$ ce n'est pas le cas. De fait puisque $M_t\to 0$ p.s et M_t continue, il existe $C>0$ tel que $\mathbb{P}(\forall s\geq 0, M_s < C) > 0$ et donc en particulier $T_C = \infty$ sur un ensemble de mesure non nulle.

2. Non, Pour $b<a$, alors par continuité $T_b<\infty$ p.s et donc $\mathbb{E}(M_{T_b}) = b$.

3. Oui, On a que pour tout t, $\mathbb{E}(M_{t\wedge T_b}) = \mathbb{E}(M_0) = a$. Donc

$$a = b\mathbb{P}(T_b<t) + \mathbb{E}(1_{T_b>t}M_t).$$

On a $\mathbb{P}(T_b<t)\to\mathbb{P}(T_b<\infty) = \mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t\geq b)$ lorsque $t\to\infty$. Et par convergence dominée $\mathbb{E}(1_{T_b>t}M_t)\to 0$ car $|1_{T_b>t}M_t| < b$ et $M_t\to 0$ lorsque $t\to\infty$.

4. Oui. On considère la martingale $M_t := e^{2\mu B_t - 2\mu^2 t}$ alors $M_0 = 1$ et avec la question précédente

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0}(B_t-\mu t)\geq b) = \mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} e^{2\mu(B_t-\mu t)} \geq e^{2\mu b}) = e^{-2\mu b}.$$

Exercise 3. Comme dans le premier exercice $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $a>0>b$ et $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ et $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$.

- ☐ Pour tous $\alpha\in\mathbb{R}$, $e^{\gamma(B_t-\alpha)-\frac{\gamma^2}{2}t} + e^{-\gamma(B_t-\alpha)-\frac{\gamma^2}{2}t}$ est une martingale VRAI
- ☐ Si $a = |b|$ alors $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a\wedge T_b}) = \cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)$. FAUX

- ☐ Pour a, b quelconque $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a\wedge T_b}) = \frac{\cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)}{\cosh(\frac{a-|b|}{2}\gamma)}$. FAUX
- ☐ Pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{\lambda T_a\wedge T_b}) < \infty$. FAUX

Solution 3. En effet:

1. Oui, $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$ et $e^{-\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$ sont deux martingales donc $e^{-\gamma\alpha}e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} + e^{\alpha\gamma}e^{-\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$est aussi une martingale comme combinaison linéaire de deux martingales.

2. Non. Simplement le terme de gauche est plus petit On note $T = T_a \wedge T_b$. Par symétrie on a $\mathbb{P}(T_a = T) = \mathbb{P}(T_b = T) = \frac{1}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}(e^{\gamma B_{t\wedge T} - \frac{\gamma^2}{2}t\wedge T}) \\
&= \mathbb{E}((1_{T_a=T} + 1_{T_b=T})(e^{\gamma B_{t\wedge T}} \times e^{-\frac{\gamma^2}{2}t\wedge T}) \\
&\to \mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T}(\frac{e^{\gamma a} + e^{-\gamma a}}{2}))
\end{aligned}$$

lorsque $t \to \infty$. Donc $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T}) = \frac{1}{\cosh \gamma a}$.

3. Non, on peut utiliser la question précédente. Par contre on peut faire un calcul similaire avec la martingale de la question 1 où on pose $\alpha = \frac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-\gamma\alpha} + e^{\gamma\alpha}) &= \mathbb{E}(e^{\gamma(B_{t\wedge T}-\alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t\wedge T} + e^{-\gamma(B_{t\wedge T}-\alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t\wedge T}) \\
&= \mathbb{E}((1_{T_a=T} + 1_{T_b=T})(e^{\gamma(B_{t\wedge T}-\alpha)} + e^{-\gamma(B_{t\wedge T}-\alpha)})e^{-\frac{\gamma^2}{2}t\wedge T}) \\
&\to \mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T}(e^{\gamma(a-\alpha)} + e^{\gamma(b-\alpha)}))
\end{aligned}$$

et on obtient que

$$\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T}) = \frac{\cosh(\frac{a+b}{2})}{\cosh(\frac{a-b}{2})}).$$

4. Non, Pour simplifier on va supposer $a = -b = 1$. et on pose $S_{1/2} = T_{1/2} \wedge T_{1/2} = \inf\{t, |B_t| = \frac{1}{2}\}$. et $S_0' = \inf\{t > S_{1/2}, B_t = 0\}$. Alors par propriété de Markov forte $B_{t+S_{1/2}} - B_{S_{1/2}}$ est un mouvement brownien et donc $\mathbb{P}(S_0' < T_1 \wedge T_{-1}) = \frac{1}{2}$ par symétrie. À S_0' on est revenue au point de départ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\lambda T_1\wedge T_{-1}}) &\geq \mathbb{E}(1_{S_0'<T_1\wedge T_{-1}}e^{\lambda T_1\wedge T_{-1}}) \\
&= \mathbb{E}(1_{S_0'<T_1\wedge T_{-1}}e^{\lambda S_0'}e^{\lambda(T_1\wedge T_{-1}-S_0')}) \\
&= \mathbb{E}(1_{S_0'<T_1\wedge T_{-1}}e^{\lambda S_0'})\mathbb{E}(e^{\lambda(T_1\wedge T_{-1})})
\end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de Markov forte $B_{t+S_0'} - B_{S_0'}$ est un mouvement brownien indépendent de $\mathcal{F}_{S_0'}$ et donc que conditionnellement $S_0' < T_1 \wedge T_{-1}$ on a que $T_1 \wedge T_{-1} - S_0'$ a la même loi que $T_1 \wedge T_{-1}$. Puisque $\mathbb{E}(1_{S_0'<T_1\wedge T_{-1}}e^{\lambda S_0'}) \to \infty$ lorsque $\lambda \to \infty$ il est possible de choisir λ tel que $\mathbb{E}(1_{S_0'<T_1\wedge T_{-1}}e^{\lambda S_0'}) > 1$ et on obtient une contradiction.

Exercise 4. Soit $M_t^{(\gamma)}$ une famille de martingales continues indexée par $\gamma \in \mathbb{R}$ et "analytique" en γ c'est à dire qu'elle peut s'écrire $M_t^{(\gamma)} = \sum_{i\geq 0} \gamma^i N_t^i$ où N_t^i sont des processus continues, bornés dans L^1 sur tout intervalle de temps $[0,t]$.

- ☐ $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} = 1 + \gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}(B_t^2 - t) + O_{\gamma\to 0}(\gamma^2)$. VRAI
- ☐ $B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale continue. VRAI
- ☐ Pour tout i, N_t^i est une martingale continue. VRAI
- ☐ Pour tout k, $\frac{d^k}{d\gamma^k}[e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}]|_{\gamma=0}$ est une martingale continue. VRAI

Solution 4. En effet:

1. Oui, on fait le développement limité
$$e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} = 1 + \gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{2}(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t)^2 + O_{\gamma\to 0}(\gamma^2).$$

2. Oui, on peut véfiier à la main
$$B_t^3 = (B_t - B_s)^3 + 3(B_t - B_s)^2 B_s + 3(B_t - B_s)B_s^2 + B_s^3$$
Donc
$$\mathbb{E}(B_t^3|\mathcal{F}_s) = 0 + 3(t-s)B_s + 0 + B_s^3$$
où on a utilisé que $(B_t - B_s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s$ et $\mathbb{E}((B_t - B_s)^k) = 0$ pour k impair. On obtient bien que
$$\mathbb{E}(B_t^3|\mathcal{F}_s) - 3t\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s^3 - 3sB_s.$$

3. Oui On écrit
$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\geq 0} \gamma^i N_s^i &= M_s \\ &= \mathbb{E}(M_t^{(\gamma)}|\mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{\gamma\geq 0} \mathbb{E}(\gamma^i N_t^i|\mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{\gamma\geq 0} \gamma^i \mathbb{E}(N_t^i|\mathcal{F}_s)\end{aligned}$$
et en identifiant les termes du développement limité lorsqu'on fait tendre $\gamma \to 0$ on a $N_s^i = \mathbb{E}(N_t^i|\mathcal{F}_s)$. On peut justifier cet argument par récurence. Soit k le plus petit entier tel que $\mathbb{E}(N_t^k|\mathcal{F}_s) \neq N_s^k$ alors
$$\mathbb{E}(N_t^k|\mathcal{F}_s) - N_s^k = \sum_{i>k} \gamma^{i-k}(N_s^i - \mathbb{E}(N_t^i|\mathcal{F}_s)) \to 0$$
lorsque $\gamma \to 0$.

4. Oui. On peut écrire $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} t} = \sum_{i \geq 0} \gamma^i N_i$ où $\frac{d^k}{d\gamma^k}[e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} t}]|_{\gamma=0} = k! N_k$ et on peut conclure avec la question précédente. Vous pouver vérifier que le cas $k = 3$ redonne la question 2. Conclusion ici pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a construit un polynome $P_k(B_t, t)$ de degré k en B_t qui soit une martingale.