Feuille d'exercice 9, Martingales continues.

May 2, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $a > 0 > b$ et $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ et $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$.

- ☐ $T_a \wedge T_b < \infty$ p.s.
- ☐ $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{|b|}{a+|b|}$.
- ☐ $\mathbb{E}(B^2_{T_a \wedge T_b}) = \mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$
- ☐ $\mathbb{E}(T_a \wedge T_b) = |b|a$

Exercise 2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue positive tel que $M_t \to 0$ p.s, $M_0 = a > 0$ et on note $T_b = \inf\{t : M_t = b\}$ pour $b \geq 0$.

- ☐ Pour tout $b > 0$, $T_b < \infty$ p.s,
- ☐ Pour tout $b > 0$, $\mathbb{E}(M_{T_b}) = a$,
- ☐ Soit $b > a$ alors $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq b) = \frac{a}{b}$,
- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0}(B_t - \mu t) \geq b) = e^{-2\mu b}$.

Exercise 3. Comme dans le premier exercice $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $a > 0 > b$ et $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ et $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$.

- ☐ Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\gamma(B_t-\alpha)-\frac{\gamma^2}{2}t} + e^{-\gamma(B_t-\alpha)-\frac{\gamma^2}{2}t}$ est une martingale
- ☐ Si $a = |b|$ alors $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a \wedge T_b}) = \cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)$
- ☐ Pour a, b quelconque $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a \wedge T_b}) = \frac{\cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)}{\cosh(\frac{a-|b|}{2}\gamma)}$.
- ☐ Pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{\lambda T_a \wedge T_b}) < \infty$.

Exercise 4. Soit $M_t^{(\gamma)}$ une famille de martingales continues indexée par $\gamma \in \mathbb{R}$ et "analytique" en γ c'est à dire qu'elle peut s'écrire $M_t^{(\gamma)} = \sum_{i\geq 0} \gamma^i N_t^i$ où N_t^i sont des processus continues, bornés dans L^1 sur tout intervalle de temps $[0, t]$.

- ☐ $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} = 1 + \gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}(B_t^2 - t) + O(\gamma^2)$.
- ☐ $B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale continue.
- ☐ Pour tout i, N_t^i est une martingale continue.
- ☐ Pour tout k, $\frac{d^k}{d\gamma^k}[e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}]|_{\gamma=0}$ est une martingale continue.