Rappel de probabilité, exercices

Cette première série est assez longue et doit être vu à la fois comme une fiche de révision sur vos précédents cours de probabilités et comme une boite à outils qui pourra être utilisée tout le long du cours. Il y a beaucoup de questions et beaucoup de notions donc prennez le temps pour les revoirs et les réassimiler.

Exercices

Dans chacun des exercices suivants dites pour chacune des affirmations si elle est vrai ou fausse et expliquer pourquoi.

Exercice 1. (Espaces mesurables) Soit Ω un ensemble. Les tribus et fonctions ci dessous sont définies sur Ω.

1. Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux tribus telle que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ alors toute fonction $\mathcal{F}_1$ mesurable est $\mathcal{F}_2$ mesurable.
2. Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux tribus et $\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Alors pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $A \in \mathcal{F}_1$ ou $A \in \mathcal{F}_2$.
3. Soit X une variable aléatoire, $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X et f une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est une fonction $\sigma(X)$ mesurable.
4. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction $\mathcal{F}$ mesurables et f une fonction telle que $\forall \omega \in \Omega$ $\lim_{i\to\infty} f_i(\omega) = f(\omega)$. Alors f est $\mathcal{F}$ mesurable.

Exercice 2. (Espérance)

1. $\mathbb{E}(\exp(X)) \leq \exp(\mathbb{E}(X))$.
2. $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ (ie : si $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$ alors $\mathbb{E}(|X|) < \infty$).
3. $\mathbb{E}(\liminf X_n) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n)$
4. Si $X > 0$, alors $\mathbb{P}(X > 2) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3. (Convergence)

1. Si $X_n \to X$ presque surement alors $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.
2. Si $X_n \to X$ dans L^2 alors $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.
3. Si $X_n \to X$ en loi alors $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$ pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
4. Si $X_n \to X$ dans L^1 alors $X_n \to X$ en probabilité.

Exercice 4. (Indépendance)

1. Pour X, Y indépendants $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
2. X et Y sont indépendants si et seulement si $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$ pour tout f, g mesurables et bornées.
3. Si X et Y sont indépendants, X et Z sont indépendants et Y et Z sont indépendants. Alors X, Y, Z sont indépendants.
4. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid tel que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big((\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2\Big) = 0$.

Exercice 5. (Lois aléatoires usuelles)

1. La somme de 3 variables de bernoulli indépendantes de paramètre p donne une loi binomiale $B(3, p)$.
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables de bernoulli iid. On définit $T = \inf\{i : X_i = 1\}$ (ie : la première apparition d'un 1). Alors T suit une loi géométrique.
3. La somme de deux variables aléatoires gaussiennes est une variable aléatoire gaussienne.
4. La somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson.