Feuille d'exercice 6, Martingale et mouvement brownien

May 2, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. On considère une boite $B = [-3,3] \times [-3,3] \cap \mathbb{Z}^2$ et son bord

$$\partial B = [(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / B, \exists (x',y') \in B : |(x,y) - (x',y')| = 1]$$

On définit sur ∂B la fonction g:

$$g(x,y) = \begin{cases} 4 & (x,y) \in \{4\} \times [-3,3] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère le problème de Dirichlet (discret) sur B dont la valeur au bord est donné par g:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in B, \\ u(x,y) = g(x,y) & (x,y) \in \partial B \end{cases}$$

où

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{|(x',y')-(x,y)|=1} u(x',y') - u(x,y).$$

Alors

- ☐ La marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}^2$ issue de $(0,0)$ touche ∂B p.s. CORRECT
- ☐ $\|u\|_{L^\infty} \leq 4$. CORRECT
- ☐ $u(0,0) = 1$. CORRECT
- ☐ $u(x,y) := \frac{1}{2}(x+4)$ est une solution. FAUX

Solution 1. En effet,

1. Oui, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$, $X_n = (x_n, y_n)$ visite des points de plus en plus éloignés lorsque $n \to \infty$. Plus formellement par le théorème centrale limite $\frac{1}{\sqrt{n}}x_n$ converge vers une gaussienne donc pour n grand $\mathbb{P}(|x_n| < \epsilon\sqrt{n}) \leq C\epsilon$ et donc $\mathbb{P}(|x_n| \leq 4) \to 0$. Autre méthode, avec $T = \inf\{X_n \in \partial B\}$ $x_{n\wedge T}$ est une martingale bornée donc elle converge p.s. et à valeur entière donc constante à partir d'un certain rang et les seuls limite possibles sont donc les points du bord : $T < \infty$.

2. Oui, on a la formule
$$u(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}(g(X_T))$$
qui est l'unique solution au problème de Dirichlet car $T < \infty$ p.s. On a donc pour tout $(x,y) \in B$, $|u(x,y)| \leq \|g\|_\infty \leq 4$.

3. Oui. On a ici un carré. Par la symmétrie du problème on a que X_n touche en premier les cotés du haut, du bas, de la gauche ou de la droite sont équiprobable donc égale à $\frac{1}{4}$. Alors
$$u(0,0) = \mathbb{E}_{(0,0)}(g(X_T)) = \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0.$$

4. Non, u ne vérifie pas les conditions au bords $u(-3,-4) = 0$ par exemple.

Exercise 2. Soit X et Y des variables aléatoires telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{E}(e^{\alpha X + \beta Y}) = e^{2\alpha + \alpha^4 + \beta^2}$$

- ☐ X et Y sont indépendantes. CORRECT
- ☐ $\mathbb{E}(X) = 2$. CORRECT
- ☐ $\mathbb{E}(Y^2) = 1$. FAUX
- ☐ Y est une gaussienne. CORRECT

Solution 2. En effet,

1. Oui, on a pour tout $\mathbb{E}(e^{\alpha X + \beta Y}) = e^{2\alpha + \alpha^4} e^{\beta^2} = \mathbb{E}(e^{\alpha X})\mathbb{E}(e^{\beta Y})$ donc les variables sont indépendante. (Remarque : La classe des fonctions exponentielle est tout à fait suffisante pour caractérisé la loi aléatoire et vérifier l'indépendance. Si elle est plus rarement utilisée que les fonctions caractéristique c'est surtout parce que pour beaucoup de variables aléatoires l'exponentielle n'est pas intégrable. Si vous souhaitez malgré tout utiliser les fonctions caractéristique poser $L(\alpha) = \mathbb{E}(e^{\alpha X})$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut vérifier que $L(\alpha)$ est une fonction holomorphe et $L(\alpha) = e^{\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ conclusion $L(\alpha) = e^{2\alpha + \alpha^4}$ sur $\mathbb{C}$ et en particulier $\mathbb{E}(e^{i\alpha X}) = e^{2i\alpha + \alpha^4}$.)

2. Oui, c'est une astuce très courante "les moments sont donnés par les dérivées de la transformée de Laplace": $\frac{d}{d\alpha}\mathbb{E}(e^{\alpha X})|_{\alpha=0} = \mathbb{E}(\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha X}|_{\alpha=0}) = \mathbb{E}(X)$. On a utilisé ici la convergence dominée. Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{d}{d\alpha}e^{2\alpha+\alpha^4}|_{\alpha=0} = 2$.

3. Non, même chose $\frac{d}{d\beta}^2\mathbb{E}(e^{\beta Y})|_{\beta=0} = \mathbb{E}(Y^2 e^{\beta Y}|_{\beta=0}) = \mathbb{E}(Y^2)$. Donc $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{d}{d\beta^2}e^{\beta^2}|_{\beta=0} = 2 \neq 1$.
4. Oui, comme mentionner précédement la transformé de Laplace suffit à caractérisé une variable aléatoire et ici elle est égale à celle d'une gaussienne de variance 2.

Exercise 3. Soit $(\xi_i)_{i\geq 1}$ des variables gaussiennes iid avec $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_1^2) = 1$ et $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

- ☐ Pour tout $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{N}$, $(S_{k_1}, \cdots, S_{k_m})$ est un vecteur gaussien. CORRECT
- ☐ $(S_{17} - S_5)$ et $(S_{12} - S_9)$ sont indépendants. FAUX
- ☐ $\sum_{i=1}^m S_i$ est une variable gaussienne centré de variance $\sigma^2 = m^3$. FAUX
- ☐ $\frac{1}{m^{3/2}}\sum_{i=1}^m S_i$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance $\frac{1}{3}$. CORRECT

Solution 3. En effet,

1. Oui, car $(S_{k_1}, \cdots, S_{k_m})$ sont des combinaisons linéaire de variables gaussiennes iid.
2. Non $\mathbb{E}(S_{17} - S_5) = \sum_{i=6}^{17}\mathbb{E}(\xi_i) = 0$, $\mathbb{E}((S_{12} - S_9)) = \sum_{i=10}^{12}\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ et $\mathbb{E}((S_{17} - S_5)(S_{12} - S_9)) = \sum_{i=10}^{12}\mathbb{E}(\xi_i^2) + \sum_{i=10}^{12}\sum_{j=6, j\neq i}^{17}\mathbb{E}(\xi_i\xi_j) = 3 \neq 0$.
3. Non, $\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j\geq 1} 1_{j\leq i}\xi_j = \sum_{j=1}^m (m+1-j)\xi_j$. Puisqu'on a ici des variables centrée indépendente
$$\mathbb{E}((\sum_{j=1}^m (m+1-j)\xi_j)^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}((m+1-j)^2\xi_j^2) = \sum_{j=1}^m j^2 = \frac{(2m+1)(m+1)m}{6}.$$
4. Oui $\frac{1}{m^{3/2}}\sum_{i=1}^m S_i$ est donc une gaussienne centré de variance $\frac{(2m+1)(m+1)m}{6m^3} \to \frac{1}{3}$ lorsque $m \to \infty$.

Exercise 4. Soit $(\xi_i)_{i\geq 0}$ des variables aléatoires Bernoulli iid $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = -\frac{1}{2}$. Et on pose $S_0 = \frac{1}{2}$ et $S_{n+1} = S_n + \text{signe}(S_n)\xi_{n+1}$ où $\text{signe}(S_n) = 1$ si $S_n \geq 0$ et -1 si $S_n < 0$.

- ☐ On a $S_n = |\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \xi_i|$. FAUX
- ☐ S_n est une chaine de Markov. CORRECT
- ☐ Pour tout $n_1 < n_2$, S_{n_1}et $S_{n_2} - S_{n_1}$sont indépendantes. CORRECT
- ☐ En écrivant $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{\lfloor nt\rfloor}$, alors pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ $(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \cdots, S_{t_k}^{(n)})$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers $(U_{t_1}, U_{t_2}, \cdots, U_{t_k})$ où $(U_{t_{i+1}} - U_{t_i})$ sont des gaussiennes de variance $t_{i+1} - t_i$. CORRECT

Solution 4. En effet,

1. Non, par exemple $\mathbb{P}(S_1 < 0) = \frac{1}{2}$.
2. La loi de S_{n+1} ne dépend que de S_n et non des temps précédent.
3. Si je note $(\tilde{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\tilde{S}_0 = \frac{1}{2}$ et $\tilde{S}_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$ la marche aléatoire usuelle. On remarque que $\tilde{S}_n$ a la même loi que S_n. Donc en particulier S_{n_1}et $S_{n_2} - S_{n_1}$sont indépendantes.
4. Même chose que précédement, $\tilde{S}_n$ a la même loi que S_n et par le cours $(\tilde{S}^{(n)}_{t_1}, \tilde{S}^{(n)}_{t_2}, \cdots, \tilde{S}^{(n)}_{t_k})$ convergent vers les gaussiennes décrites ici.