Feuille d'exercice 6, Martingale et mouvement brownien

March 28, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. On considère une boite $B = [-3,3] \times [-3,3] \cap \mathbb{Z}^2$ et son bord

$$\partial B = [(x,y) \in \mathbb{Z}^2/B, \exists (x',y') \in B : |(x,y)-(x',y')| = 1]$$

On définit sur ∂B la fonction g:

$$g(x,y) = \begin{cases} 4 & (x,y) \in \{4\} \times [-3,3] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère le problème de Dirichlet (discret) sur B dont la valeur au bord est donné par g:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in B, \\ u(x,y) = g(x,y) & (x,y) \in \partial B \end{cases}$$

où

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{|(x',y')-(x,y)|=1} u(x',y') - u(x,y).$$

Alors

- ☐ La marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}^2$ issue de $(0,0)$ touche ∂B p.s.
- ☐ $\|u\|_{L^\infty} \leq 4$.
- ☐ $u(0,0) = 1$.
- ☐ $u(x,y) := \frac{1}{2}(x+4)$ est une solution.

Exercise 2. Soit X et Y des variables aléatoires telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X + \beta Y}) = e^{2\alpha + \alpha^4 + \beta^2}$$

- ☐ X et Y sont indépendantes.

- ☐ $\mathbb{E}(X) = 2$.
- ☐ $\mathbb{E}(Y^2) = 1$.
- ☐ Y est une gaussienne.

Exercise 3. Soit $(\xi_i)_{i\geq 1}$ des variables gaussiennes iid avec $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_1^2) = 1$ et $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

- ☐ Pour tout $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{N}$, $(S_{k_1}, \cdots, S_{k_m})$ est un vecteur gaussien.
- ☐ $(S_{17} - S_5)$ et $(S_{12} - S_9)$ sont indépendants.
- ☐ $\sum_{i=1}^m S_i$ est une variable gaussienne centré de variance $\sigma^2 = m^3$.
- ☐ $\frac{1}{m^{3/2}} \sum_{i=1}^m S_i$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance $\frac{1}{3}$.

Exercise 4. Soit $(\xi_i)_{i\geq 0}$ des variables aléatoires Bernoulli iid $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = -\frac{1}{2}$. Et on pose $S_0 = \frac{1}{2}$ et $S_{n+1} = S_n + \text{signe}(S_n)\xi_{n+1}$ où $\text{signe}(S_n) = 1$ si $S_n \geq 0$ et -1 si $S_n < 0$.

- ☐ On a $S_n = |\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \xi_i|$.
- ☐ S_n est une chaine de Markov.
- ☐ Pour tout $n_1 < n_2$, S_{n_1}et $S_{n_2} - S_{n_1}$sont indépendantes.
- ☐ En écrivant $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}$, alors pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ $(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \cdots, S_{t_k}^{(n)})$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers $(U_{t_1}, U_{t_2}, \cdots, U_{t_k})$ où $(U_{t_{i+1}} - U_{t_i})$ sont des gaussiennes de variance $t_{i+1} - t_i$.