Feuille d'exercice 5: Chaine de Markov et fonction harmonique.

March 21, 2021

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire usuelle sur $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = (x \pm 1, y)|X_n = (x,y)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = (x, y \pm 1)|X_n = (x,y)) = \frac{1}{4}$$

et 0 dans les autres cas. On note Q la matrice de transition. Soit la fonction $h(x,y) = 1_{y\geq 1}$. On suppose $X_0 = (0,0)$.

- □ $\mathbb{P}(y_2 \geq 1) = \frac{1}{4}$.
- □ $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $\sum_{(x',y'),(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathbb{Z}^2} Q((x,y),(x',y'))Q((x',y')(\tilde{x},\tilde{y})) = 1$.
- □ $Q1 = 1$ (la fonction sur $\mathbb{Z}^2$ constante égale à 1).
- □ $[Q^2h](0,0) = \frac{1}{2}$.

Exercise 2. Soit une chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ avec $X_0 = x$ et la matrice de transition Q définit par

$$Q(y, y+1) = p_y \quad \text{et} \quad Q(y, y-1) = q_y$$

avec $p_y + q_y = 1$, $p_y, q_y > 0$ pour tout $y > 0$, $Q(0,0) = 1$ et $Q(y,z) = 0$ dans tous les autres cas. On pose $T_0 = \inf[k : X_k = 0]$.

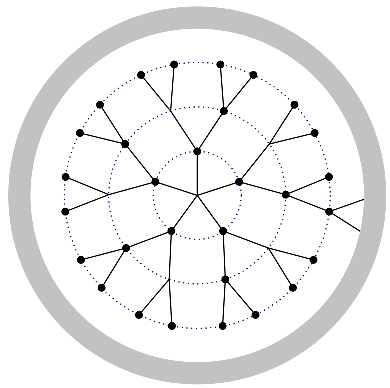
- □ Si $p_y < \frac{1}{2}$ pour tout $y > 0$, alors X_n est une surmartingale.
- □ Si $p_y < \frac{1}{2}$ pour tout $y > 0$, alors $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$.
- □ La fonction

  $$f(n) = \prod_{1\leq y\leq n} \frac{q_y}{p_y}$$

  est harmonique sur $\mathbb{N}^*$.

☐ Dans le cas $p_y = \frac{2}{3}$ et $q_y = \frac{1}{3}$ pour tout $y > 0$ et $x = 3$ alors

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = \frac{1}{8}.$$



Exercise 3. Soit E un arbre régulier infini de racine x_0. Sauf à la racine tous les sommets ont le même nombre d de voisins . Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire (standard) sur cet arbre. À chaque étape, elle saute d'un sommet à un sommet voisin de manière équiprobable : $\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) = \frac{1}{d}$ si (x, y) est une arête du graphe et 0 sinon. On note $r : E \to \mathbb{N}$ la distance dans le graphe par rapport à la racine ($r(x)$ =nombre d'arêtes du plus court chemin de x à x_0). On note $T_0 = \inf\{n : X_n = x_0\}$

☐ $(r(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sousmartingale.

☐ La fonction $h(x) = (d-1)^{-r(x)}$ est harmonique sur $E \setminus \{x_0\}$.

☐ Si $X_0 = x$, $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = (d-1)^{-r(x)}$.

☐ La fonction $g(x) = \mathbb{P}(T_0 < \infty|X_0 = x)$ est une fonction harmonique sur $E \setminus \{x_0\}$.

Exercise 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov sur E un ensemble discret avec matrice de transition Q. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *irreductible* si pour tout $x, y \in E$, il existe n tel que $\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) > 0$. On dit que X_n est *recurrente* si $\mathbb{P}(\exists n > 0, X_n = x|X_0 = x) = 1$ (le processus retourne à son point de départ presque surement). On admettra que si la chaine de Markov est irreductible et récurrente alors elle visite tous les points de E une infinité de fois presque surement.

☐ La marche aléatoire usuelle sur $\mathbb{Z}$ est récurrente.

☐ La fonction $h(n) = n$ est harmonique sur $\mathbb{Z}$ pour la marche aléatoire usuelle.

☐ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irreductible et recurrente. Alors toute fonction harmonique sur E et bornée inférieurement est constante.

☐ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irreductible et recurrente. Alors toute fonction harmonique sur E est constante.