Feuille d'exercice 8, Martingale et mouvement brownien

May 2, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien. Pour tout $u \geq 0$ on note $T_u = \inf\{t : B_t = u\}$

- ☐ Soit $0 < a < b$, T_a et $T_b - T_a$ sont indépendants. CORRECT
- ☐ Pour tout $a > 0$ et $t > 0$, $\mathbb{P}(T_a < t) = \mathbb{P}(T_1 \leq \frac{t}{a^2}) = \mathbb{P}(T_{\frac{a}{\sqrt{t}}} \leq 1)$. CORRECT
- ☐ Pour tout $s < t$, $\mathbb{P}(T_1 \in [s,t]) = 2(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_1^\infty e^{-x^2/2t}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_1^\infty e^{-x^2/2s}dx)$. CORRECT
- ☐ $\mathbb{E}(T_1) < \infty$. FAUX

Solution 1. En effet

1. Oui, Par la propriété de Markov forte $B_{t+T_a} - B_{T_a}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$. Donc $\tilde{T} = \inf\{t : B_{t+T_a} - B_{T_a} = b - a\}$ est indépendant de T_a. Puisque $B_{T_a} = a$, on a alors que $\tilde{T} = \inf\{t : B_{t+T_a} = b\} = T_b - T_a$.
2. Oui, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_a < t) &= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} B_s \geq a) \\
&= \mathbb{P}(\sup_{u\in[0,\frac{t}{a^2}]} \frac{1}{a} B_{a^2 u} \geq 1) \\
&= \mathbb{P}(\sup_{u\in[0,\frac{t}{a^2}]} B_u \geq 1) \\
&= \mathbb{P}(T_1 \leq \frac{t}{a^2})
\end{aligned}$$

où on a utilisé le changement d'échelle du mouvement brownien. On a également

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_a < t) &= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} B_s \geq a)\\ &= \mathbb{P}(\sup_{u\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{t}} B_{tu} \geq \frac{a}{\sqrt{t}})\\ &= \mathbb{P}(\sup_{u\in[0,1]} B_u \geq \frac{a}{\sqrt{t}})\\ &= \mathbb{P}(T_{\frac{a}{\sqrt{t}}} \leq 1)\end{aligned}$$

3. Oui on

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \leq t) &= \mathbb{P}(\sup_{u\in[0,t]} B_s \geq 1)\\ &= 2\mathbb{P}(B_t \geq 1)\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx\end{aligned}$$

De même $\mathbb{P}(T_1 \leq s) = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_1^\infty e^{-x^2/2s} dx$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \in [s,t]) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t) - \mathbb{P}(T_1 \leq s)\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx - \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx\end{aligned}$$

4. Non, Pour $t \gg 1$ on a

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^1 e^{-x^2/2t} dx \approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

Alors

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1 \geq t) dt \approx \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi t}} dt = \infty$$

Autre preuve : Par symmétrie on a $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_{-1})$ et $\mathbb{P}(T_1 < T_{-1}) = \mathbb{P}(T_{-1} < T_1) = \frac{1}{2}$. On écrit

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_1 1_{T_1 < T_{-1}}) + \mathbb{E}(T_1 1_{T_{-1} < T_1}) = \mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-1}) + \mathbb{E}((T_1 - T_{-1}) 1_{T_{-1} < T_1})$$

Par propriété de markov forte $B_{t+T_{-1}} - B_{T_{-1}}$ est un mouvement brownien. On pose $\tilde{T} = \inf\{t : B_{t+T_{-1}} - B_{T_{-1}} \geq 2\}$ Puisque $B_{T_{-1}} = -1$ on a $\tilde{T} = (T_1 - T_{-1})$ si $T_{-1} < T_1$. De plus $\tilde{T}$ a la même loi que T_2 et donc

$$\mathbb{E}(\tilde{T}) = \mathbb{E}((T_2 - T_1) + T_1) = 2\mathbb{E}(T_1).$$

Conclusion en utilisant que $\mathbb{P}(T_{-1} < T_1) = \frac{1}{2}$ et que $\tilde{T}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_{-1}}$ on a

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\tilde{T}) = \mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-1}) + \mathbb{E}(T_1)$$

absurde si $\mathbb{E}(T_1) < \infty$.

Exercise 2. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ et $W_t = tB_{1/t}$.

- ☐ Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,M]} B_t > \epsilon M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$. CORRECT
- ☐ W_t est un mouvement brownien. CORRECT
- ☐ Soit $a > 0$, pour tout $t > 0$ $\mathbb{P}(\forall s > t : B_s < as) = \mathbb{P}(T_a > \frac{1}{t})$ CORRECT
- ☐ Pour tout $A > 0$, $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists s \in (0,\delta) : B_s > As^{1/2}) = 1$. CORRECT

Solution 2. En effet

1. Oui,
$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,M]} B_t > \epsilon M) = \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{M}} B_{Mt} > \epsilon\sqrt{M}) = \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > \epsilon\sqrt{M})$$
qui tend vers 0 pour $M \to \infty$.

2. Oui, on a déjà vérfié que $(W_{t_1}, \cdots, W_{t_n})$ est un vecteur gaussien avec $\mathbb{E}(W_tW_s) = \min(s,t)$ pour tout s,t et que $(W_s)_{s\in(0,\infty)}$ est continue. Il reste juste à vérifier la continuité en 0. On a
$$\sup_{t\in(0,\delta)} W_t = \max_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in(\delta 2^{-n-1},\delta 2^{-n})} W_t \le \max_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \sup_{t\in(\delta 2^n,\delta 2^{n+1})} B_t$$
mais on a
$$\mathbb{P}(\sup_{t\in(\delta 2^n,\delta 2^{n+1})} 2^{-n}B_t > \epsilon) = \mathbb{P}(\sup_{t\in[1,2]} B_t > \frac{\epsilon 2^{n/2}}{\sqrt{\delta}}) \lesssim \exp(-\frac{\epsilon^2 2^{n-1}}{\delta})$$
donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\sup_{t\in(\delta 2^n,\delta 2^{n+1})} 2^{-n}B_t > \epsilon) < \infty$ et même converge vers 0 lorsque $\delta \to 0$. Donc pour tout ϵ, $\mathbb{P}(\sup_{t\in(0,\delta)} W_t > \epsilon) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$. Ainsi W_t est bien continue en 0.

3. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\forall s > t : B_s < as) &= \mathbb{P}(\forall u < \frac{1}{t} : uB_{\frac{1}{u}} < a)\\ &= \mathbb{P}(\forall u < \frac{1}{t} : W_u < a)\\ &= \mathbb{P}(T_a > \frac{1}{t})\end{aligned}$$
car W_u est un mouvement brownien.

4. On $\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{\exists s \in (0,\frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}}B_s > A\}) = 0$ ou 1 car c'est un ensemble $\mathcal{F}_{0+}$ mesurable. Et
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{\exists s \in (0,\frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}}B_s > A\}) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\cap_{n\le N}\{\exists s \in (0,\frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}}B_s > A\})\\ &\ge \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{N}B_{\frac{1}{N}} > A\})\\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_1 > A\})\\ &> 0\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{\exists s \in (0, \frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}}B_s > A\}) = 1$.

Exercise 3. (Pont Brownien) Soit $(P_t)_{\in[0,1]}$ un pont brownien. C'est à dire qu'il a la même loi qu'un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ conditionnellement à $B_1 = 0$.

- ☐ $(P_t)_{t\in[0,1]}$ a la même loi que $(P_{1-t})_{t\in[0,1]}$ (symmétrie). CORRECT
- ☐ Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$, $(P_{t_1}, \cdots, P_{t_n})$ est un vecteur gaussien. CORRECT
- ☐ $P_{1/2}$ est une gaussienne de variance $1/2$. FAUX
- ☐ Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$, $(P_{t_{i+1}} - P_{t_i})$ sont indépendants. FAUX

Solution 3. En effet

1. Oui, $B_{1-t} - B_1$est un mouvement brownien. Donc conditionnellement à $B_1 = 0$ on a bien que B_t et B_{1-t} ont la même loi et donc que P_t et P_{1-t} ont la même loi. Autre preuve avec la construction du mouvement brownien

$$P_t = \sum_n \sum_{k\leq 2^n} g_{n'k}\mathcal{N}_{k,n}$$

qui est bien symmétrique sur $[0, 1]$ (car $g_{n,k}(t) = g_{n,2^n-k}(1 - t)$).

2. Avec la construction du mouvement brownien

$$P_t = \sum_n \sum_{k\leq 2^n} g_{n'k}\mathcal{N}_{k,n}$$

donne immédiatement que $(P_{t_1}, \cdots, P_{t_n})$ est un vecteur gaussien car $\mathcal{N}_{k,n}$ sont des gaussiennes indépendante. Autre preuve on a la densité

$$\mathbb{P}(B_{t_1} \in [x_1, x_1+dx_1], \cdots, B_{t_{n+1}} \in [x_{n+1}, x_{n+1}+dx_{n+1}]) = \prod_{i=1}^{n+1} e^{\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2t_i-t_{i-1}}} dx_i$$

Donc en imposant, $t_{n+1} = 1$ et $B_1 = 0$ on a

$$\mathbb{P}(P_{t_1} \in [x_1, x_1+dx_1], \cdots, P_{t_n} \in [x_n, x_n+dx_n]) = (\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}})\times e^{\frac{x_n{}^2}{2(1-t_n)}} dx_i$$

qui est bien une loi de vecteur gaussien (ie : de la forme exp("polynome à n variables de degré 2")

3. Non toujours avec la construction du mouvement brownien $P_{1/2} = g_{0,1}(\frac{1}{2})\mathcal{N}_{0,1} = \frac{1}{2}\mathcal{N}_{0,1}$ a une variance de $1/4$. Autre preuve, avec la formule de la question précédente on a

$$\mathbb{P}(P_{1/2} \in [x_1, x_1 + dx_1]) = e^{2x_1^2}dx_i$$

qui est une loi gaussienne de variance $\frac{1}{4}$.

4. Non, par exemple $(P_{1/2} - P_0) = P_{1/2} = -(P_1 - P_{1/2})$.

Exercise 4. (Girsanov) Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien, $b \in \mathbb{R}$ et $W_s = B_s + bs$ (mouvement brownien avec dérive). Soit X,Y deux variables gaussiennes avec $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = b$, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}((Y-b)^2) = 1$

- ☐ Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont des gausiennes indépendantes de variances $t_{i+1} - t_i$. CORRECT
- ☐ $\lim_{s\to\infty} \frac{W_s}{s} = b$ p.s. CORRECT
- ☐ Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(1_{Y\in A} e^{-bY+\frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{X\in A})$ CORRECT
- ☐ Pour tout $U \subset \mathcal{C}([0,1])$ (mesurable), $\mathbb{E}(1_{W\in U} e^{-bW_1+\frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{B\in U})$ CORRECT

Solution 4. Voir cours.