Feuille d'exercice 8, Martingale et mouvement brownien

April 18, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien. Pour tout $u \geq 0$ on note $T_u = \inf\{t : B_t = u\}$

- ☐ Soit $0 < a < b$, T_a et $T_b - T_a$ sont indépendants.
- ☐ Pour tout $a > 0$ et $t > 0$, $\mathbb{P}(T_a < t) = \mathbb{P}(T_1 \leq \frac{t}{a^2}) = \mathbb{P}(T_{\frac{a}{\sqrt{t}}} \leq 1)$.
- ☐ Pour tout $s < t$, $\mathbb{P}(T_1 \in [s,t]) = 2(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_1^\infty e^{-x^2/2s} dx)$.
- ☐ $\mathbb{E}(T_1) < \infty$.

Exercise 2. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ et $W_t = tB_{1/t}$.

- ☐ Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,M]} B_t > \epsilon M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$.
- ☐ W_t est un mouvement brownien.
- ☐ Soit $a > 0$, pour tout $t > 0$ $\mathbb{P}(\forall s > t : B_s < as) = \mathbb{P}(T_a > \frac{1}{t})$
- ☐ Pour tout $A > 0$, $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists s \in (0,\delta) : B_s > As^{1/2}) = 1$.

Exercise 3. (Pont Brownien) Soit $(P_t)_{\in[0,1]}$ un pont brownien. C'est à dire qu'il a la même loi qu'un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ conditionnellement à $B_1 = 0$.

- ☐ $(P_t)_{t\in[0,1]}$ a la même loi que $(P_{1-t})_{t\in[0,1]}$ (symmétrie).
- ☐ Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$, $(P_{t_1}, \cdots, P_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
- ☐ $P_{1/2}$ est une gaussienne de variance $1/2$.
- ☐ Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$, $(P_{t_{i+1}} - P_{t_i})$ sont indépendants.

Exercise 4. (Girsanov) Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien, $b \in \mathbb{R}$ et $W_s = B_s + bs$ (mouvement brownien avec dérive). Soit X,Y deux variables gaussiennes avec $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = b$, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}((Y-b)^2) = 1$

- ☐ Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont des gausiennes indépendantes de variances $t_{i+1} - t_i$.
- ☐ $\lim_{s\to\infty} \frac{W_s}{s} = b$ p.s.
- ☐ Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(1_{Y\in A} e^{-bY+\frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{X\in A})$
- ☐ Pour tout $U \subset \mathcal{C}([0,1])$ (mesurable), $\mathbb{E}(1_{W\in U} e^{-bW_1+\frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{B\in U})$