Feuille d'exercice 7, Martingale et mouvement brownien

May 2, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

Exercise 1. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien.

- ☐ $\mathbb{E}(B_sB_t) = s \wedge t$. CORRECT
- ☐ $(2B_1 - B_2, B_1 + B_3, B_2 - B_3)$ est un vecteur gaussien CORRECT
- ☐ $\int_0^1 B_s ds$ est une variable gaussienne de variance 1. FAUX
- ☐ $B_s - sB_1$ et B_1 sont indépendants. CORRECT

Solution 1. En effet .

1. Oui, Si $s \leq t$ on a $\mathbb{E}(B_sB_t) = \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) = s + 0$ car B_s est de variance s et B_s, $B_t - B_s$ sont indépendants de moyenne nulle.
2. Oui, (B_1, B_2, B_3) est un vecteur gaussien donc ses combinaisons linéaires sont aussi des vecteurs gaussiens.
3. La variance n'est pas correct. (B_s) est une fonction continue donc on peut écrire l'intégrale comme une somme de Riemann $\int_0^1 B_s ds = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}}$. Pour tout n,

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_i) = \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)(B_{\frac{i+1}{n}} - B_i)$$

   c'est donc une gaussienne comme somme de gaussienne indépendante, centrée et de variance $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i)^2\frac{1}{n} \sim \frac{n^2}{3}$. Donc la $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}})$ est une suite de gaussienne centrée dont la variance converge vers $\frac{1}{3}$.
4. Oui, $\mathbb{E}(B_1(B_s - sB_1)) = \mathbb{E}(B_1B_s) - s\mathbb{E}(B_1^2) = 0$. Donc puisqu'on a affaire un vecteur gaussien, $B_s - sB_1$ et B_1 sont indépendants.

Exercise 2. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien.

- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$. CORRECT
- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,A]} B_t > AM) = \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M)$. FAUX
- ☐ $\mathbb{P}(\limsup_{t\to 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty) = 1$. CORRECT
- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M, \sup_{t\in[1,2]} B_t > M + B_1) = \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M)^2$ CORRECT

Solution 2. En effet .

1. Oui, Pour tout $\omega \in \Omega$ $B_s(\omega)$ est continue donc bornée., autrement dit $\{\omega : \forall N \in \mathbb{N}, \sup_{t\in[0,1]} B_t(\omega) > N\} = \emptyset$. Alors

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t(\omega) > M) = \mathbb{P}(\cap_{N\in\mathbb{N}} N, \sup_{t\in[0,1]} B_t(\omega) > N\}) = 0.$$

2. Non, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,A]} B_t > AM) &= \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_{At} > AM)\\ &= \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{A}} B_{At} > \sqrt{A}M)\\ &= \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > \sqrt{A}M)\end{aligned}$$

3. $\limsup_{t\to 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty$ est $\mathcal{F}_{0^+}$ mesurable donc sa probabilité est soit 0, soit 1. Et pour tout M et $\epsilon > 0$ on a $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,\epsilon]} \frac{1}{t} B_t \geq M) \geq \mathbb{P}(\frac{1}{\epsilon} B_\epsilon \geq M) \geq \mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} B_1 \geq M) \to 1$ pour $\epsilon \to 0$.

4. Oui, $(B_t - B_1)_{t\geq 1}$, est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_1$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M, \sup_{t\in[1,2]} B_t > M + B_1) &= \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M)\mathbb{P}(\sup_{t\in[1,2]} (B_t - B_1) > M)\\ &= \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M)^2\end{aligned}$$

Exercise 3. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien. Soit $T = \inf[t \geq 1, B_t = 0]$.

- ☐ Pour tout $\delta > 0$, p.s. il existe $0 < t_1, t_2 < \delta$ tel que $B_{t_1} > 0$ et $B_{t_2} < 0$. CORRECT
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists t \in (0,\delta), B_t = 0) = 1$. CORRECT
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists t \in (0,\delta), B_{T+t} = 0) = 1$. CORRECT
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, p.s pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $B_t = 0$, il existe $t < t' < t+\delta$ tel que $B_{t'} = 0$. FAUX

Solution 3. En effet .

1. Oui, pour tout $\delta > 0$, on $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,\delta]} B_t > 0) = 1$ et par symmétrie $\mathbb{P}(\inf_{t\in[0,\delta]} B_t < 0) = 1$.

2. Oui, Puisque B_t et continue et que avec probabilité 1 il existe $0 < t_1, t_2 < \delta$ avec $B_{t_1} > 0$ et $B_{t_2} < 0$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $0 < t < \delta$ avec $B_t = 0$.

3. Oui par la propriété de Markov Forte $B_{T+t} - B_T$ est un mouvement brownien. Avec $B_T = 0$ on a donc

$$\mathbb{P}(\exists t \in (0,\delta), B_{T+t} - B_T = 0) = \mathbb{P}(\exists t \in (0,\delta), B_t = 0) = 1.$$

4. Non, contre exemple, soit $S = \sup\{s \in (0,1) : B_s = 0\}$ (ce n'est pas un temps d'arret). Puisque $B_1 \neq 0$ avec probabilité 1, $S < 1$ et donc par définition $B_s \neq 0$ pour tout $s \in (S,1)$. En fait si une fonction continue vérifiait cette propriété alors elle serait constante égale à 0. Si cela peut sembler en contradiction avec les propriétés précédentes il se trouve l'ensemble des points dans $(0,1)$ tel que $B_s = 0$ est un ensemble non dénombrable et donc que l'on peut avoir une propriété presque sur pour chacun des zéros mais pas presque sur pour tous les zéros.

Exercise 4. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(\tilde{B}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ deux mouvements browniens indépendant. On définit le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ par $W_0 = 0$ et $W_t = tB_{1/t}$.

- ☐ $\hat{B}_t := B_{1-t} - B_1$ a la même loi qu'un mouvement brownien sur $[0,1]$. CORRECT
- ☐ $\frac{1}{2}(B_t + \tilde{B}_t)$ est un mouvement brownien. FAUX
- ☐ $\mathbb{E}(W_s W_t) = s \wedge t$, CORRECT
- ☐ W_t converge en proba vers 0 pour $t \to 0$. CORRECT

Solution 4. En effet .

1. Oui, on a bien que $\hat{B}_t$ est continue, que pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n$ $(\hat{B}_{t_1}, \cdots, \hat{B}_{t_n})$ est un vecteur gaussien et pour $s < t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{B}_s\hat{B}_t) &= \mathbb{E}(B_{1-s}B_{1-t} - B_{1-s}B_1 - B_{1-t}B_1 + B_1^2)\\ &= (1-t) - (1-s) - (1-t) + 1\\ &= s\end{aligned}$$

C'est donc bien un mouvement brownien.

2. Non, On a $\mathbb{E}((\frac{1}{2}(B_t + \tilde{B}_t)^2) = \frac{1}{4}(\mathbb{E}(B_t^2) + \mathbb{E}(\tilde{B}_t^2)) = \frac{t}{2}$. Par contre $\frac{1}{\sqrt{2}}(B_t + \tilde{B}_t)$ est bien un mouvement brownien.

3. Oui, $\mathbb{E}(W_s W_t) = st\mathbb{E}(B_{\frac{1}{s}} B_{\frac{1}{t}}) = st\frac{1}{\max(s,t)} = \min(s,t)$.

4. Oui, W_t est une gaussienne de variance t, donc converge en proba vers 0 lorsque $t \to 0$.