

# Feuille d'exercice 7, Martingale et mouvement brownien

April 12, 2021

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 1.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien.

- $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$ .
- $(2B_1 - B_2, B_1 + B_3, B_2 - B_3)$  est un vecteur gaussien
- $\int_0^1 B_s ds$  est une variable gaussienne de variance 1.
- $B_s - sB_1$  et  $B_1$  sont indépendants.

**Exercice 2.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien.

- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow \infty$ .
- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,A]} B_t > AM) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)$ .
- $\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty) = 1$ .
- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M, \sup_{t \in [1,2]} B_t > M + B_1) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)^2$

**Exercice 3.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien. Soit  $T = \inf\{t \geq 1, B_t = 0\}$ .

- Pour tout  $\delta > 0$ , p.s. il existe  $0 < t_1, t_2 < \delta$  tel que  $B_{t_1} > 0$  et  $B_{t_2} < 0$ .
- Pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_t = 0) = 1$ .
- Pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_{T+t} = 0) = 1$ .
- Pour tout  $\delta > 0$ , p.s pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que  $B_t = 0$ , il existe  $t < t' < t + \delta$  tel que  $B_{t'} = 0$ .

**Exercice 4.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ,  $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  deux mouvements browniens indépendant. On définit le processus  $(W_t)_{t \geq 0}$  par  $W_0 = 0$  et  $W_t = tB_{1/t}$ .

- $\hat{B}_t := B_{1-t} - B_1$  a la même loi qu'un mouvement brownien sur  $[0, 1]$ .

- $\frac{1}{2}(B_t + \tilde{B}_t)$  est un mouvement brownien.
- $\mathbb{E}(W_s W_t) = s \wedge t$ ,
- $W_t$  converge en proba vers 0 pour  $t \rightarrow 0$ .