Devoir maison 2 : Mouvement Brownien et calcul stochastique

16 juin 2021

1 Enoncé

Problème 1. Soit $(B_t)_t$ un mouvement brownien issue de 0, $\eta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On note $\boldsymbol{y} = ((t_1, y_1), (t_2, y_2), \cdots, (t_k, y_k))$ avec $0 < t_1 < \cdots < t_k = t_F$ et $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ (par convention $t_0 = y_0 = 0$). On appelera « parcours » la fonction $f_{\boldsymbol{y}}$ linéaire par morceau sur les intervales $[t_{i-1}, t_i]$ avec $f_{\boldsymbol{y}}(t_i) = y_i$, formellement

$$f_{\boldsymbol{y}}(t) = \frac{(t - t_{i-1})y_i + (t_i - t)y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Et on appelera « circuit » la bande de taille η autour du parcours $\mathcal{C}_{\boldsymbol{y},\eta} = \{(t, y) \in [0, t_F] \times \mathbb{R} : |y - f_{\boldsymbol{y}}(t)| \leq \eta\}$. Dans cet exercice on cherchera ici à estimer la probabilité que le mouvement brownien parcours le circuit sans en sortir lorsque η est petit.

1. On s'interesse ici au cas $k = 1$, $y_1 = 0$.
   (a) Parmi les parcours $\mathcal{C}_{(0,t_F),\eta}$ et $\mathcal{C}_{(0,2t_F),2\eta}$ lequel est le plus facile ? C'est à dire, a-t-on $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \mathbb{P}(\forall t \leq 2t_F : |B_t| < 2\eta)$ ou l'inverse ?
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \frac{2\eta}{\sqrt{2\pi t_F}}$.
   (c) On note $T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = \eta\}$, montrer que $\mathbb{E}(T) = \eta^2$.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \frac{\eta^2}{t_F}$.
   (e) Montrer que $\cos(\gamma B_t)e^{\frac{\gamma^2 t}{2}}$ est une martingale pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.
   (f) En déduire que pour tout $\sigma < \frac{\pi}{2\eta}$ il existe $C > 0$ tel que

   $$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq Ce^{-\frac{\sigma^2}{2}t_F}$$

   quelque soit t_F.
   (g) Montrer que pour tout $|x| \leq \eta$

   $$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t + x| < \eta) \leq \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta)$$

   (On pourra introduire le temps d'arret $S = \inf\{t : |B_t| = |x|\}$).

2. On considère maintenant le cas général.
   (a) Toujours dans le cas $k = 1$ (mais y_1 quelconque), notons $J_{t_1,y_1} = \{\forall t \le t_1 : |B_t - \frac{y_1}{t_1}t| < \eta\}$. Montrer que
$$e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_1}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}) \le \mathbb{E}(1_{\{\forall t \le t_1 : |B_t - \frac{y_1}{t_1}t| < \eta\}} e^{\frac{y_1}{t_1}B_{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1}}) \le e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1})$$
   et en déduire que
$$e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}) \le \mathbb{P}(\forall t \le t_F : |B_t| < \eta) \le e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}).$$
   (b) Pour $k = 2$, et $\boldsymbol{y} = ((1, y_1), (2, y_2))$, montrer que
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\forall t \le 2 : |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)| < \eta) \\ &\quad \le \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}) \times \max_{|s| \le \eta} \mathbb{P}(\forall t \le 1 : |B_t - s - (y_2 - y_1)t| < \eta)\end{aligned}$$
   (c) Pour k quelconque, On suppose que pour tout i, $t_i = i$, c'est à dire $\boldsymbol{y} = ((1, y_1), (2, y_2), \cdots, (k, y_k))$. Montrer que
$$\begin{aligned}&\log \mathbb{P}(\forall t \le k : |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)| < \eta) \\ &\quad \le -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(y_i - y_{i-1})^2 + k \log \mathbb{P}(\forall t \le 1 : |B_t| < \eta) + o(1)\end{aligned}$$
   lorsque $\eta \to 0$.
   (d) On note $\tilde{\boldsymbol{y}} = ((1, 1), (2, 2))$ et $\boldsymbol{y}' = ((1, 2), (2, 2))$. En supposant qu'à une constante près qui ne dépend ni des y_i ni de η l'inégalité du dessus soit une égalité, parmi ces deux circuit $\tilde{\boldsymbol{y}}$ et $\boldsymbol{y}'$ lequel est le plus « facile » lorsque $\eta \to 0$?

Problème 2. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables réelles iid symmétriques (donc $\mathbb{E}(X_1) = 0$) et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Soit M_n, un processus dans $\mathbb{C}$ (que l'on identifiera avec $\mathbb{R}^2$) définit de la manière suivante :
$$M_0 \neq 0 \qquad M_n = M_{n-1} + i\frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|}X_n.$$
Soient $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$. On notera H_s un processus continue adapté de matrices $H_s \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

1. Étude du modèle discret :
   (a) Vérifier que M_n est une martingale dans $\mathbb{C}$.
   (b) Si $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ (Bernoulli), montrer que $|M_n|^2$ est déterministe et déterminer sa valeur.
2. Étude du modèle continue dans le cas générale : On notera
$$(H \cdot \boldsymbol{B})_t = \int_0^t H_s d\boldsymbol{B}_s$$
   l'intégrale stochastique dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $\langle (H \cdot \boldsymbol{B}), (H \cdot \boldsymbol{B}) \rangle_t = \int_0^t H_s^T H_s ds$

(b) En déduire que si H_s est à valeur dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des matrices orthogonales sur $\mathbb{R}^2$ alors $(H \cdot \boldsymbol{B})$ est un mouvement brownien.

3. Ici on suppose que H_t est la projection orthogonal de rang 1 dont le noyau est $N_t := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (H \cdot \boldsymbol{B})_t \right) \in \mathbb{R}^2$ (et l'image le vecteur $\{N_t\}^\perp$). C'est à dire pour tout t on a

$$H_t^2 = H_t \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad H_t N_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On admettra que H_t est bien définit et continue.

(a) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et M_n comme dans le cas discret avec X_1 est une gaussienne et $M_0 = \sqrt{n} + i0 = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 0 \end{pmatrix}$ (où on a identifié $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$). Montrer que pour tout t, $\frac{1}{\sqrt{n}} M_{\lfloor nt \rfloor}$ converge en loi vers N_t . (on pourra approximer H_t par une fonction constante par morceau.)

(b) Exprimer $R_t := \|N_t\|^2$ à l'aide de la formule d'Ito.

(c) Avec $T_{\frac{1}{2}} = \inf\{t : R_t = \frac{1}{2}\}$ et $T_{10} = \inf\{t : R_t = 10\}$ Donner $\mathbb{P}(T_{10} < T_{\frac{1}{2}})$.

2 Correction

Solution 1.

1. Dans le cas $k = 1$, $y_1 = 0$.

(a) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall t \leq 2t_F : |B_t| < 2\eta) &= \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_{2t}| < 2\eta) \\ &= \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : \sqrt{2}|B_t| < 2\eta) \\ &\geq \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement d'échelle du mouvement brownien à la deuxième égalité.

(b) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) &\leq \mathbb{P}(|B_{t_F}| < \eta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_F}} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\frac{x^2}{2t_F}} dx \\ &\leq \frac{2\eta}{\sqrt{2\pi t_F}} \end{aligned}$$

car $e^{-\frac{x^2}{2t_F}} \leq 1$.

(c) On utilise que $B_t^2 - t$ est une martingale. Donc par le Théorème de l'arret pour tout t,

$$0 = \mathbb{E}(B_0^2 - 0) = \mathbb{E}(B_{t\wedge T}^2 - t \wedge T).$$

Avec la question précédent $\mathbb{P}(T > t_F) \leq \frac{2\eta}{\sqrt{2\pi t_F}} \to 0$ lorsque $t_F \to \infty$. Donc $T < \infty$ p.s.. Avec $B_{t\wedge T}^2 \leq \eta^2$, par convergence dominé $\mathbb{E}(B_{t\wedge T}^2) \to \mathbb{E}(B_T^2) = \eta^2$ et par croissance monotone $\mathbb{E}(t\wedge T) \to \mathbb{E}(T)$. Conclusion $\mathbb{E}(T) = \eta^2$.

(d) Avec Markov

$$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) = \mathbb{P}(T > t_F) \leq \frac{\mathbb{E}(T)}{t_F} = \frac{\eta^2}{t_F}.$$

(e) Première méthode on écrit $\cos(\gamma B_t)e^{\frac{\gamma^2 t}{2}} = \frac{1}{2}(e^{i\gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}t} + e^{-i\gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}t})$ et on montre que chacun de ces termes est une martingale. On a ici le même calcul que pour $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$. Soit $s < t$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}t}|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{i\gamma(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s)e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}t} \\
&= \mathbb{E}(e^{i\gamma(B_t - B_s)})e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}t} \\
&= e^{-\frac{\gamma^2}{2}(t-s)}e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}t} \\
&= e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}s}
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $(B_t - B_s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et est une gaussienne de variance $t - s$. Deuxième méthode, on utilise la formule d'Ito avec $f(x, y) = \cos(\gamma x)e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$. $\partial_x f = -\gamma \sin(\gamma x)e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$, $\partial_{xx} f = -\gamma^2 \cos(\gamma x)e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$, $\partial_y f = \frac{\gamma^2}{2}\cos(\gamma x)e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(B_t, t) = 1 &- \gamma \int_0^t \sin(\gamma B_s)e^{\frac{\gamma^2}{2}s}dB_s + \frac{\gamma^2}{2}\int_0^t \cos(\gamma B_s)e^{\frac{\gamma^2}{2}s}ds \\
&- \frac{\gamma^2}{2}\int_0^t \cos(\gamma B_s)e^{\frac{\gamma^2}{2}s}d\langle B, B\rangle_s \\
= 1 &- \gamma \int_0^t \sin(\gamma B_s)e^{\frac{\gamma^2}{2}s}dB_s
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\langle B, t\rangle = \langle t, t\rangle = 0$ car t est à variation fini. Conclusion $f(B_t, t)$ est une martingale par définition de l'intégrale stochastique. Remarquer qu'on aurait aussi pu conclure directement en remarquant que $\partial_y f = -\frac{1}{2}\partial_{xx} f$ et donc $f(B_t, \langle B, B\rangle_t)$ est une martingale.

(f) Soit $\gamma < \frac{\pi}{2\eta}$. Avec la question précédente et le théorème de l'arret

$$\begin{aligned}1 = \mathbb{E}(\cos(\gamma B_0)e^0) &= \mathbb{E}(\cos(\gamma B_{t\wedge T})e^{\frac{\gamma^2}{2}t\wedge T}) \\ &= \mathbb{E}(1_{T\leq t}\cos(\gamma\eta)e^{\frac{\gamma^2}{2}T}) + \mathbb{E}(1_{T>t}\cos(\gamma B_t)e^{\frac{\gamma^2}{2}t}) \\ &\geq \mathbb{E}(1_{T>t}\cos(\gamma\eta)e^{\frac{\gamma^2}{2}t}) \\ &= \mathbb{P}(T>t)\cos(\gamma\eta)e^{\frac{\gamma^2}{2}t}\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\gamma B_{t\wedge T} \in (-\gamma\eta, \gamma\eta) \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ donc $0 < \cos(\gamma\eta) \leq \cos(\gamma B_{t\wedge T})$. On a alors bien

$$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) = \mathbb{P}(T > t_F) \leq \frac{1}{\cos(\gamma\eta)}e^{-\frac{\gamma^2}{2}t_F}.$$

(g) On note $S = \inf\{t : |B_t| = |x|\}$. Alors clairement $S < T$ car $|x| \leq \eta$. On note $B_t^{(S)} = B_{t+S} - B_S$ et on a

$$\begin{aligned}\{\sup_{s\leq t}|B_s| \geq \eta\} = &\{B_S = x \text{ et } \sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} + x| \geq \eta\} \\ &\cup \{B_S = -x \text{ et } \sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} - x| \geq \eta\}.\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov Forte $B_t^{(S)}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_S$. Par symétrie $\mathbb{P}(B_S = x) = \mathbb{P}(B_S = -x) = \frac{1}{2}$ et ces deux ensembles sont disjoints. Alors

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{\sup_{s\leq t}|B_s| \geq \eta\}) \\ &\quad= \mathbb{P}(\{B_S = x \text{ et } \sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} + x| \geq \eta\}) \\ &\qquad+ \mathbb{P}(\{B_S = -x \text{ et } \sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} + x| \geq \eta\}) \\ &\quad= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} + x| \geq \eta\}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} + x| \geq \eta\}) \\ &\quad= \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} + x| \geq \eta\})\end{aligned}$$

Puisque $B^{(S)}$ est un mouvement brownien et $S > 0$ on a toujours $\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t-S}|B_s^{(S)} + x| \geq \eta\}) \geq \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t}|B_s + x| \geq \eta\})$ et donc

$$\mathbb{P}(\{\sup_{s\leq t}|B_s| \geq \eta\}) \geq \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t}|B_s + x| \geq \eta\})$$

2. On considère maintenant le cas général.

(a) Sur J_{t_1,y_1} on a

$$\begin{aligned}
y_1-\eta \le B_{t_1} &\Rightarrow \frac{y_1^2}{t_1}-\frac{\eta y_1}{t_1}\le \frac{y_1 B_{t_1}}{t_1}\\
&\Rightarrow \frac{y_1^2}{2t_1}-\frac{\eta y_1}{t_1}\le \frac{y_1 B_{t_1}}{t_1}-\frac{y_1^2}{2t_1}\\
&\Rightarrow \exp(\frac{y_1^2}{2t_1}-\frac{\eta y_1}{t_1})\le \exp(\frac{y_1 B_{t_1}}{t_1}-\frac{y_1^2}{2t_1})
\end{aligned}$$

et on a également $\exp(\frac{y_1 B_{t_1}}{t_1}-\frac{y_1^2}{2t_1})\le \exp(\frac{y_1^2}{2t_1}-\frac{\eta y_1}{t_1})$ à partir de $B_{t_1}\le y_1-\eta$. Alors

$$\begin{aligned}
e^{\frac{y_1^2-2\eta|y_1|}{2t_1}}\mathbb{P}(J_{t_1,y_1}) &= \mathbb{E}(1_{J_{t_1,y_1}}e^{\frac{y_1^2-2\eta|y_1|}{2t_1}})\\
&\le \mathbb{E}(1_{J_{t_1,y_1}}e^{\frac{y_1}{t_1}B_{t_1}-\frac{y_1^2}{2t_1}})\\
&\le \mathbb{E}(1_{J_{t_1,y_1}}e^{\frac{y_1^2+2\eta|y_1|}{2t_1}}) = e^{\frac{y_1^2+2\eta|y_1|}{2t_F}}\mathbb{P}(J_{t_1,y_1}).
\end{aligned}$$

On note $W_t = B_t - t\frac{y_1}{t_1}$ et $\mathbb{Q}$ la mesure $\mathbb{P}$ multilpliée par le poids $e^{\frac{y_1}{t_1}B_{t_1}-\frac{y_1^2}{2t_1}}$. Par Girsanov W_t est un mouvement brownien pour la mesure $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le t_1:|W_t|<\eta\}}e^{\frac{y_1}{t_1}B_{t_1}-\frac{y_1^2}{2t_1}}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(1_{\{\forall t\le t_1:|W_t|<\eta\}})\\
&= \mathbb{Q}(\forall t\le t_1, |W_t|<\eta)\\
&= \mathbb{P}(\forall t\le t_1, |B_t|<\eta).
\end{aligned}$$

(b) Pour $k=2$, et $\boldsymbol{y}=((1,y_1),(2,y_2))$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 2:|B_t-f_{\boldsymbol{y}}(t)|<\eta\}})\\
&\quad= \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|B_t-y_1t|<\eta\}}1_{\{\forall t\le 1:|B_{t+1}-(y_2-y_1)t-y_1|<\eta\}})\\
&\quad= \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|B_t-y_1t|<\eta\}}\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|B_{t+1}-(y_2-y_1)t-y_1|<\eta\}}|\mathcal{F}_1))\\
&\quad= \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|B_t-y_1t|<\eta\}}\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|(B_{t+1}-B_1)-(y_2-y_1)t-(y_1-B_1)|<\eta\}}|\mathcal{F}_1))
\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov $\tilde{B}_t := (B_{t+1}-B_1)$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_1$. Donc si on définit la fonction $h(x) = \mathbb{P}_{\tilde{B}}(\forall t\le 1 : |\tilde{B}_t-(y_2-y_1)t-(y_1-x)|<\eta)$ on a

$$\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|(B_{t+1}-B_1)-(y_2-y_1)t-(y_1-B_1)|<\eta\}}|\mathcal{F}_1) = h(B_1).$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 2:|B_t-f_{\boldsymbol{y}}(t)|<\eta\}}) &= \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|B_t-y_1t|<\eta\}}h(B_1))\\
&\le \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1:|B_t-y_1t|<\eta\}})\sup_{x\in(y_1-\eta,y_1+\eta)}h(x).
\end{aligned}$$

(c) Comme à la question a) on a

$$\sup_{x\in(y_1-\eta,y_1+\eta)} h(x) \le e^{\frac{-(y_2-y_1)^2+4\eta(y_2-y_1)}{2}} \sup_{|s|\le\eta} \mathbb{P}(\sup_{0\le t\le 1} |B_t+s| < \eta\})$$
$$= e^{\frac{-(y_2-y_1)^2+4\eta(y_2-y_1)}{2}} \mathbb{P}(\sup_{0\le t\le 1} |B_t| < \eta\}).$$

On note $h^{(k)} = \mathbb{P}_{\tilde{B}}(\forall t \le 1 : |\tilde{B}_t - (y_k - y_{k-1})t - (y_{k-1} - x)| < \eta)$ et on raisonne maintenant par récurence

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le k: |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)|<\eta\}}) \\
&\quad = \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le k-1: |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)|<\eta\}}\mathbb{E}(1_{\{\forall t\le 1: |(B_{t+k-1}-B_{k-1})-(y_k-y_{k-1})t-(y_{k-1}-B_{k-1})|<\eta\}}|\mathcal{F}_{k-1})) \\
&\quad \le \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le k-1: |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)|<\eta\}}) \sup_{x\in(y_1-\eta,y_1+\eta)} h^{(k)}(x) \\
&\quad \le \mathbb{E}(1_{\{\forall t\le k-1: |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)|<\eta\}}) e^{\frac{-(y_2-y_1)^2+4\eta(y_2-y_1)}{2}} \mathbb{P}(\sup_{0\le t\le 1} |B_t| < \eta\})
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
&\log \mathbb{P}(\forall t \le k : |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)| < \eta) \\
&\qquad \le \log \mathbb{P}(\forall t \le (k-1) : |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)| < \eta) - \frac{1}{2}(y_k - y_{k-1})^2 \\
&\qquad\quad + \log \mathbb{P}(\forall t \le 1 : |B_t| < \eta) + O(\eta)
\end{aligned}$$

lorsque $\eta \to 0$.

(d) On a d'un côté

$$(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_0)^2 + (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

et

$$(y_1' - y_0')^2 + (y_2 - y_1')^2 = 2^2 + 0^2 = 4$$

Dans la formule précédente les autres termes ne dépends pas des y_i et donc on aurait

$$\log \mathbb{P}(\forall t \le 2 : |B_t - f_{\tilde{\boldsymbol{y}}}(t)| < \eta) \ge \log \mathbb{P}(\forall t \le k : |B_t - f_{\boldsymbol{y}'}(t)| < \eta).$$

c'est à dire $\tilde{\boldsymbol{y}}$ « plus facile » que $\boldsymbol{y}'$.

Solution 2. .

1. Étude du modèle discret :

(a) On a $|M_{n+1}| \le |M_n| + |\frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|} X_n| = |M_n| + |X_n|$ et donc

$$\mathbb{E}(|M_n|) \le \mathbb{E}(|M_0|) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_i|) < \infty.$$

On a également

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= M_{n-1} + i\frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})\\ &= M_{n-1} + i\frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|}\mathbb{E}(X_n)\\ &= M_{n-1}\end{aligned}$$

et M_n est donc bien une martingale dans $\mathbb{C}$.

(b) On calcul

$$\begin{aligned}|M_n|^2 &= M_n\overline{M_n}\\ &= \left(M_{n-1} + i\frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|}X_n\right)\left(\overline{M_{n-1}} - i\frac{\overline{M_{n-1}}}{|M_{n-1}|}X_n\right)\\ &= M_{n-1}\overline{M_{n-1}}\left(1 + \frac{X_n^2}{|M_{n-1}|^2}\right)\\ &= |M_{n-1}|^2 + 1\end{aligned}$$

Donc par récurence immédiate $|M_n|^2 = |M_0|^2 + n$.

2. Étude du modèle continue dans le cas générale avec

$$(H \cdot \boldsymbol{B})_t = \int_0^t H_s d\boldsymbol{B}_s.$$

(a) On note

$$H_s = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B}_s = \begin{pmatrix} B_s^{(1)} \\ B_s^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec $B_s^{(1)}, B_s^{(2)}$ deux mouvement brownien indépendant. On a alors

$$H \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a \cdot B^{(1)} + b \cdot B^{(2)} \\ c \cdot B^{(1)} + d \cdot B^{(2)} \end{pmatrix}$$

où $(a \cdot B^{(1)})_t = \int_0^t a_s dB_s^{(1)}$ est l'intégrale stochastique usuelle sur $\mathbb{R}$ et même chose pour les autres termes.

$$\begin{aligned}\langle (H \cdot \boldsymbol{B})^1, (H \cdot \boldsymbol{B})^1 \rangle &= \langle a \cdot B^{(1)} + b \cdot B^{(2)}, a \cdot B^{(1)} + b \cdot B^{(2)} \rangle\\ &= a^2 \cdot \langle B^{(1)}, B^{(1)} \rangle + (ba \cdot \langle B^{(2)}, B^{(1)} \rangle\\ &\quad + ab\langle B^{(1)}, B^{(2)} \rangle + b^2 \cdot \langle B^{(2)}, B^{(2)} \rangle\\ &= a^2 \cdot t + b^2 \cdot t\end{aligned}$$

On a utilisé que $\langle B_s^{(1)}, B_s^{(1)} \rangle_t = \langle B_s^{(2)}, B_s^{(2)} \rangle_t = t$ et $\langle B_s^{(1)}, B_s^{(2)} \rangle_t = 0$ car les deux mouvements browniens sont indépendants. Donc

$$\langle (H \cdot \boldsymbol{B})^1, (H \cdot \boldsymbol{B})^1 \rangle_t = \int_0^t a_s^2 + b_s^2 ds.$$

Le calcul pour chacun des autres termes se fait de la même manière et on obtient

$$\langle (H\cdot \boldsymbol{B})^1, (H\cdot \boldsymbol{B})^2\rangle_t = \int_0^t a_s c_s + b_s d_s ds$$
$$\langle (H\cdot \boldsymbol{B})^2, (H\cdot \boldsymbol{B})^1\rangle_t = \int_0^t a_s c_s + b_s d_s ds$$
$$\langle (H\cdot \boldsymbol{B})^2, (H\cdot \boldsymbol{B})^2\rangle_t = \int_0^t c_s^2 + d_s^2 ds$$

En écrivant

$$H_s H_s^T = \begin{pmatrix} a_s^2 + b_s^2 + & a_s c_s + b_s d_s \\ a_s c_s + b_s d_s & c_s^2 + d_s^2 \end{pmatrix}$$

on a bien $\langle (H\cdot \boldsymbol{B}), (H\cdot \boldsymbol{B})\rangle_t = \int_0^t H_s H_s^T ds$.

(b) Si H_s est à valeur dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ alors pour tout s, $H_s H_s^T = I_d$ et donc $\langle (H\cdot \boldsymbol{B}), (H\cdot \boldsymbol{B})\rangle_t = \int_0^t I_d ds = tI_d$. Par le Théorème de Lévy on a que $(H\cdot \boldsymbol{B})$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$.

3.

(a) Avec H_t un projecteur de rang 1, il peux s'écrire de la forme $H_t = u_t u_t^T$ où $u_t = \begin{pmatrix} u_t^{(1)} \\ u_t^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \|u_t\|^2 = |u_t^{(1)}|^2 + |u_t^{(2)}|^2 = 1$ pour tout t. Alors

$$\begin{aligned}(H\cdot \boldsymbol{B}) &= (u_t u_t^T \cdot \boldsymbol{B}) \\ &= u_t \cdot (u_t^T \cdot \boldsymbol{B}) \\ &= u_t \cdot (u^{(1)} \cdot B_s^{(1)} + u^{(2)} \cdot B_s^{(2)}).\end{aligned}$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned}&\langle (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)}), (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)})\rangle \\ &= (u^{(1)})^2 \cdot \langle B^{(1)}, B^{(1)}\rangle + (u^{(2)})^2 \cdot \langle B^{(2)}, B^{(2)}\rangle \\ &= (u^{(1)})^2 \cdot t + (u^{(2)})^2 \cdot t\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\langle (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)}), (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)})\rangle_t &= \int_0^t (u^{(1)})^2 + (u^{(2)})^2 ds \\ &= t\end{aligned}$$

Par le théorème de Lévy $(u^{(1)} \cdot B_s^{(1)} + u^{(2)} \cdot B_s^{(2)})$ est un mouvement brownien (dans $\mathbb{R}$) que l'on note $\tilde{B}$. On a alors

$$N_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t u_s d\tilde{B}_s.$$

On a identifie $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Ici $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + i0 \in \mathbb{C}$ et puisque $u_t \perp N_t$ et $\|u_t\| = 1$, on a $u_t = \pm i \frac{N_t}{|N_t|}$. On approxime u par une fonction constante par morceau $u_s^{(n)} = \sum_{k=1}^n 1_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}(s) u_{\frac{k-1}{n}}$. Alors

$$\begin{aligned} N_t &= \lim_{n\to\infty} 1 + \int_0^t u_s^{(n)} d\tilde{B}_s \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} u_{\frac{k-1}{n}} (\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + i \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{N_{\frac{k-1}{n}}}{|N_{\frac{k-1}{n}}|} (\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{n} + i \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{N_{\frac{k-1}{n}}}{|N_{\frac{k-1}{n}}|} \sqrt{n} (\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \right). \end{aligned}$$

Ici $\sqrt{n}(\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}})$ sont des gaussiennes iid et on reconnait alors la définition de M_n.

(b) On a $f(x,y) = x^2 + y^2$. $\partial_x f = 2x$, $\partial_{xx} f = 2$, $\partial_y f = 2y$ and $\partial_{yy} f = 2$ et on peut écrire $dN_s = \begin{pmatrix} u_s^{(1)} d\tilde{B}_s \\ u_s^{(2)} d\tilde{B}_s \end{pmatrix}$. Alors

$$\|N_t\|^2 = 1 + 2\int_0^t N_s^{(1)} u_s^{(1)} d\tilde{B}_s + 2\int_0^t u_s^{(2)} N_s^{(2)} d\tilde{B}_s + \int_0^t (u_s^{(1)})^2 + (u_s^{(1)})^2 ds.$$

Or $\|u_s\|^2 = 1$ et $u_s \perp N_s$ pour tout s donc $(u_s^{(1)})^2 + (u_s^{(1)})^2 = 1$ et $N_s^{(1)} u_s^{(1)} + N_s^{(2)} u_s^{(2)} = 0$. Conclusion

$$\|N_t\|^2 = 1 + t$$

(c) Puisque $\|N_t\|$ est déterministe strictement croissant on a $T_{\frac{1}{2}} = \infty$ p.s et $T_{10} = 9$ p.s. En particulier $\mathbb{P}(T_{10} < T_{\frac{1}{2}}) = 1$.