Devoir maison 2 : Mouvement Brownien et calcul stochastique

7 juin 2021

1 Enoncé

Problème 1. Soit $(B_t)_t$ un mouvement brownien issue de 0, $\eta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On note $\boldsymbol{y} = ((t_1, y_1), (t_2, y_2), \cdots, (t_k, y_k))$ avec $0 < t_1 < \cdots < t_k = t_F$ et $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ (par convention $t_0 = y_0 = 0$). On appelera « parcours » la fonction $f_{\boldsymbol{y}}$ linéaire par morceau sur les intervales $[t_{i-1}, t_i]$ avec $f_{\boldsymbol{y}}(t_i) = y_i$, formellement

$$f_{\boldsymbol{y}}(t) = \frac{(t - t_{i-1})y_i + (t_i - t)y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Et on appelera « circuit » la bande de taille η autour du parcours $\mathcal{C}_{\boldsymbol{y},\eta} = \{(t, y) \in [0, t_F] \times \mathbb{R} : |y - f_{\boldsymbol{y}}(t)| \leq \eta\}$. Dans cet exercice on cherchera ici à estimer la probabilité que le mouvement brownien parcours le circuit sans en sortir lorsque η est petit.

1. On s'interesse ici au cas $k = 1$, $y_1 = 0$.
   (a) Parmi les parcours $\mathcal{C}_{(0,t_F),\eta}$ et $\mathcal{C}_{(0,2t_F),2\eta}$ lequel est le plus facile ? C'est à dire, a-t-on $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \mathbb{P}(\forall t \leq 2t_F : |B_t| < 2\eta)$ ou l'inverse ?
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \frac{2\eta}{\sqrt{2\pi t_F}}$.
   (c) On note $T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = \eta\}$, montrer que $\mathbb{E}(T) = \eta^2$.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \frac{\eta^2}{t_F}$.
   (e) Montrer que $\cos(\gamma B_t)e^{\frac{\gamma^2 t}{2}}$ est une martingale pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.
   (f) En déduire que pour tout $\sigma < \frac{\pi}{2\eta}$ il existe $C > 0$ tel que

   $$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq Ce^{-\frac{\sigma^2}{2}t_F}$$

   quelque soit t_F.
   (g) Montrer que pour tout $|x| \leq \eta$

   $$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t + x| < \eta) \leq \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta)$$

   (On pourra introduire le temps d'arret $S = \inf\{t : |B_t| = |x|\}$).

2. On considère maintenant le cas général.
   (a) Toujours dans le cas $k = 1$ (mais y_1 quelconque), notons $J_{t_1,y_1} = \{\forall t \le t_1 : |B_t - \frac{y_1}{t_1} t| < \eta\}$. Montrer que
   $$e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_1}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}) \le \mathbb{E}(1_{\{\forall t \le t_1 : |B_t - \frac{y_1}{t_1} t| < \eta\}} e^{\frac{y_1}{t_1} B_{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1}}) \le e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1})$$
   et en déduire que
   $$e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}) \le \mathbb{P}(\forall t \le t_F : |B_t| < \eta) \le e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}).$$
   (b) Pour $k = 2$, et $\boldsymbol{y} = ((1, y_1), (2, y_2))$, montrer que
   $$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\forall t \le 2 : |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)| < \eta) \\ &\qquad \le \mathbb{P}(J_{t_1,y_1}) \times \max_{|s| \le \eta} \mathbb{P}(\forall t \le 1 : |B_t - s - (y_2 - y_1)t| < \eta) \end{aligned}$$
   (c) Pour k quelconque, On suppose que pour tout i, $t_i = i$, c'est à dire $\boldsymbol{y} = ((1, y_1), (2, y_2), \cdots, (k, y_k))$. Montrer que
   $$\begin{aligned} &\log \mathbb{P}(\forall t \le k : |B_t - f_{\boldsymbol{y}}(t)| < \eta) \\ &\qquad \le -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (y_i - y_{i-1})^2 + k \log \mathbb{P}(\forall t \le 1 : |B_t| < \eta) + o(1) \end{aligned}$$
   lorsque $\eta \to 0$.
   (d) On note $\tilde{\boldsymbol{y}} = ((1, 1), (2, 2))$ et $\boldsymbol{y'} = ((1, 2), (2, 2))$. En supposant qu'à une constante près qui ne dépend ni des y_i ni de η l'inégalité du dessus soit une égalité, parmi ces deux circuit $\tilde{\boldsymbol{y}}$ et $\boldsymbol{y'}$ lequel est le plus « facile » lorsque $\eta \to 0$?

Problème 2. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables réelles iid symmétriques (donc $\mathbb{E}(X_1) = 0$) et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Soit M_n, un processus dans $\mathbb{C}$ (que l'on identifiera avec $\mathbb{R}^2$) définit de la manière suivante :

$$M_0 \ne 0 \qquad M_n = M_{n-1} + i \frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|} X_n.$$

Soient $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$. On notera H_s un processus continue adapté de matrices $H_s \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

1. Étude du modèle discret :
   (a) Vérifier que M_n est une martingale dans $\mathbb{C}$.
   (b) Si $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ (Bernoulli), montrer que $|M_n|^2$ est déterministe et déterminer sa valeur.
2. Étude du modèle continue dans le cas générale : On notera
   $$(H \cdot \boldsymbol{B})_t = \int_0^t H_s d\boldsymbol{B}_s$$
   l'intégrale stochastique dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $\langle (H\cdot \boldsymbol{B}), (H\cdot \boldsymbol{B})\rangle_t = \int_0^t H_s^T H_s ds$

(b) En déduire que si H_s est à valeur dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des matrices orthogonales sur $\mathbb{R}^2$ alors $(H\cdot \boldsymbol{B})$ est un mouvement brownien.

3. Ici on suppose que H_t est la projection orthogonal de rang 1 dont le noyau est $N_t := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (H\cdot \boldsymbol{B})_t\right) \in \mathbb{R}^2$ (et l'image le vecteur $\{N_t\}^\perp$). C'est à dire pour tout t on a

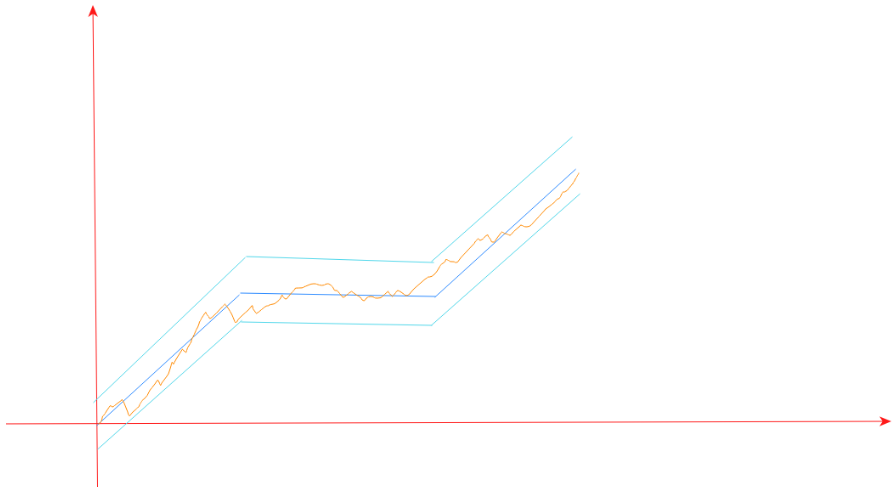
$$H_t^2 = H_t \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad H_t N_t = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

On admettra que H_t est bien définit et continue.

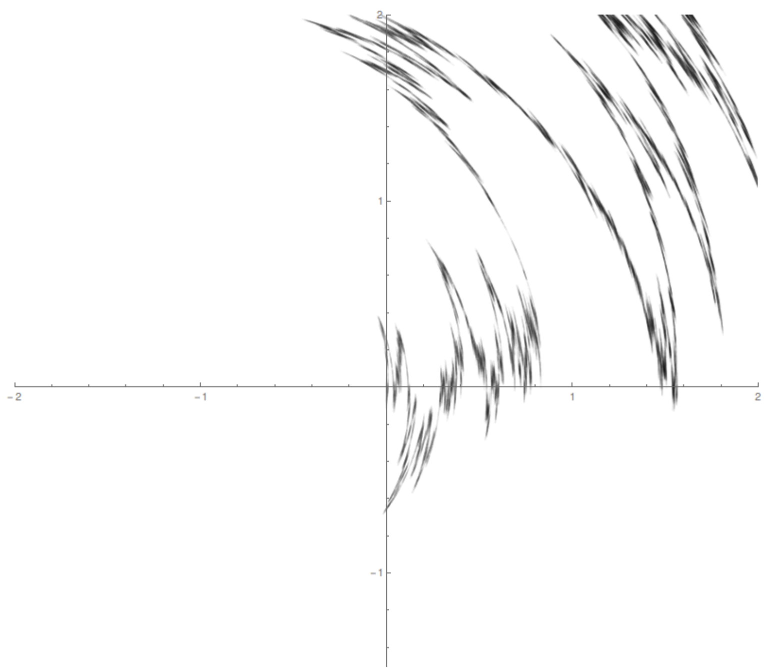
(a) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et M_n comme dans le cas discret avec X_1 est une gaussienne et $M_0 = \sqrt{n}+i0 = \begin{pmatrix}\sqrt{n}\\0\end{pmatrix}$ (où on a identifié $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$). Montrer que pour tout t, $\frac{1}{\sqrt{n}} M_{\lfloor nt\rfloor}$ converge en loi vers N_t . (on pourra approximer H_t par une fonction constante par morceau.)

(b) Exprimer $R_t := \|N_t\|^2$ à l'aide de la formule d'Ito.

(c) Avec $T_{\frac{1}{2}} = \inf\{t : R_t = \frac{1}{2}\}$ et $T_{10} = \inf\{t : R_t = 10\}$ Donner $\mathbb{P}(T_{10} < T_{\frac{1}{2}})$.



Un circuit dans le problème 1.



$(H \cdot \boldsymbol{B})$ à la fin du problème 2.