Devoir maison 1 : Martingales Discrètes

2 avril 2021

1 Enoncé

Problème 1. Quatres personnes Alice, Bob, Claire et David jouent au jeu d'argent suivant. Un réel $\eta \in (0,1)$ est fixé pour toute la partie. Alice (resp Bob,Claire et David) commence la partie avec $A_0 \geq 0$ argent (resp B_0, C_0 et D_0) et on note (A_n, B_n, C_n, D_n) leur argent respectif au temps n. À chaque temps deux joueurs sont tiré aléatoirement de manière équitable. Ces deux joueurs misent une même somme égale à $\eta\times$ « l'argent dont dispose le plus pauvre des deux ». Puis ils parient à pile ou face avec une pièce équilibré et le gagnant remporte la mise. Le jeux se répète alors de la même manière.

Exemple : à $n = 1$ Bob et David sont tirés et $B_0 \leq D_0$. Ils misent donc chacun ηB_0. Bob gagne. Alors $B_1 = B_0 + \eta B_0$, $D_1 = D_0 - \eta B_0$. Rien ne change pour les autres joueurs $A_1 = A_0$ et $C_1 = C_0$.

1. Montrer que chaque joueur joue une infinité de fois.
2. Montrer que A_n est une martingale.
3. Montrer A_n (resp (B_n, C_n, D_n)) converge p.s. Quelles sont les limites possibles ?
4. Justifier que la convergence est dans L^1. Quel est la probabilité que $A_n \to 0$ pour $n \to \infty$?
5. Dans la suite on supposera qu'il n'y a plus que 2 joueurs Alice, Bob et qu'au début de la partie Bob dispose d'une quantité illimité d'argent $A_0 = 1$ et $B_0 = \infty$. Justifier que $\log A_n$ est une surmartingale.
6. Proposer le comportement asymptotique de $\frac{1}{n} \log A_n$. En déduire une autre preuve que $A_n \to 0$ p.s
7. Avec $\eta = \frac{1}{2}$, pour quel $\alpha \in \mathbb{R}$ $\log A_n + \alpha n$ est il une martingale ?
8. Soit $T = \inf\{A_n \leq 10^{-10}\}$. Montrer que $\frac{10 \log 10}{\alpha} \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{10 \log 10 + \log 2}{\alpha}$. Est ce cohérent avec le comportement asymptotique de la question 6 ?

Problème 2. Soit $\Lambda = [-L, L] \times [-L, L] \cap \mathbb{Z}^2$ avec $L \in \mathbb{N}$. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire usuelle sur Λ, c'est à dire la chaine de Markov telle que pour tout $(x,y),(x',y') \in \Lambda$

$$\mathbb{P}(X_n = (x',y')|X_{n-1} = (x,y)) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } |x-x'|+|y'-y| = 1 \\ 0 & \text{si } |x-x'|+|y'-y| > 1 \\ \frac{1}{4}(\text{resp } \frac{1}{2}) & \text{si } (x,y) = (x',y') \text{ et que } (x,y) \\ & \text{est sur le bord (resp le coin) de } \Lambda \end{cases}$$

Soit $T_{-L} = \inf\{n : X_n \in \{-L\} \times [-L,L]\}$, $T_L = \inf\{n : X_n \in \{L\} \times [-L,L]\}$, $S_{-L} = \inf\{n : X_n \in [-L,L] \times \{-L\}\}$, $S_L = \inf\{n : X_n \in [-L,L] \times \{L\}\}$. On notera $\mathcal{F}_n$ la tribu canoniquement associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que T_{-L} ,T_L et $T_{-L} \wedge T_L = \min\{T_{-L}, T_L\}$ sont des temps d'arret.
2. On note $\Lambda^\circ = [-L+1, L-1] \times [-L+1, L-1] \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Lambda$. Montrer que pour tout $a,b,c \in \mathbb{R}$ la fonction $f : \Lambda \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) := ax + by + c$ est harmonique sur Λ°.
3. Supposons $X_0 = (x_0, y_0)$. Calculer $\mathbb{P}(T_{-L} < T_L)$ et $\mathbb{P}(S_{-L} < S_L)$.
4. On note $\partial\Lambda = \Lambda \setminus \Lambda^\circ$. Soit $u : \partial\Lambda \to \mathbb{R}$, on cherche $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tel que h est harmonique sur Λ° et $h|_{\partial\Lambda} = u$. Proposer une formule permettant de construire h. Cette solution est-elle unique ?
5. Dans cette question on suppose

$$u(x,y) = \begin{cases} 6 & \text{si } x = -L \\ 0 & \text{si } x = L \\ -5 & \text{si } y = -L \text{ et } x \notin \{-L, L\} \\ 3 & \text{si } y = L \text{ et } x \notin \{-L, L\} \end{cases}$$

   Soit h comme dans la question précédente. Calculer $h(0,0)$.
6. On pose $Y_n = \|X_n\|^2$ et on note $T = T_{-L} \wedge T_L \wedge S_{-L} \wedge S_L$. Montrer que $Y_{n\wedge T} - n \wedge T$ est une martingale.
7. Pour $X_0 = (0,0)$, montrer que $L^2 \leq \mathbb{E}(T) \leq 2L^2$.