Devoir maison 1 : Martingales Discrètes, Correction.

20 avril 2021

1 Enoncé

Problème 1. Quatres personnes Alice, Bob, Claire et David jouent au jeu d'argent suivant. Un réel $\eta \in (0,1)$ est fixé pour toute la partie. Alice (resp Bob,Claire et David) commence la partie avec $A_0 \geq 0$ argent (resp B_0, C_0 et D_0) et on note (A_n, B_n, C_n, D_n) leur argent respectif au temps n. À chaque temps deux joueurs sont tiré aléatoirement de manière équitable. Ces deux joueurs misent une même somme égale à $\eta\times$ « l'argent dont dispose le plus pauvre des deux ». Puis ils parient à pile ou face avec une pièce équilibré et le gagnant remporte la mise. Le jeux se répète alors de la même manière.

Exemple : à $n = 1$ Bob et David sont tirés et $B_0 \leq D_0$. Ils misent donc chacun ηB_0. Bob gagne. Alors $B_1 = B_0 + \eta B_0$, $D_1 = D_0 - \eta B_0$. Rien ne change pour les autres joueurs $A_1 = A_0$ et $C_1 = C_0$.

1. Montrer que chaque joueur joue une infinité de fois.
2. Montrer que A_n est une martingale.
3. Montrer A_n (resp (B_n, C_n, D_n)) converge p.s. Quelles sont les limites possibles ?
4. Justifier que la convergence est dans L^1. Quel est la probabilité que $A_n \to 0$ pour $n \to \infty$?
5. Dans la suite on supposera qu'il n'y a plus que 2 joueurs Alice, Bob et qu'au début de la partie Bob dispose d'une quantité illimité d'argent $A_0 = 1$ et $B_0 = \infty$. Justifier que $\log A_n$ est une surmartingale.
6. Proposer le comportement asymptotique de $\frac{1}{n}\log A_n$. En déduire une autre preuve que $A_n \to 0$ p.s
7. Avec $\eta = \frac{1}{2}$, pour quel $\alpha \in \mathbb{R}$ $\log A_n + \alpha n$ est il une martingale ?
8. Soit $T = \inf\{A_n \leq 10^{-10}\}$. Montrer que $\frac{10\log 10}{\alpha} \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{10\log 10+\log 2}{\alpha}$. Est ce cohérent avec le comportement asymptotique de la question 6 ?

Problème 2. Soit $\Lambda = [-L, L]\times[-L, L]\cap\mathbb{Z}^2$ avec $L \in \mathbb{N}$. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire usuelle sur Λ, c'est à dire la chaine de Markov telle que pour tout $(x, y), (x', y') \in \Lambda$

$$\mathbb{P}(X_n = (x', y') | X_{n-1} = (x, y)) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } |x - x'| + |y' - y| = 1 \\ 0 & \text{si } |x - x'| + |y' - y| > 1 \\ \frac{1}{4}(\text{resp } \frac{1}{2}) & \text{si } (x, y) = (x', y') \text{ et que } (x, y) \\ & \text{est sur le bord (resp le coin) de } \Lambda \end{cases}$$

Soit $T_{-L} = \inf\{n : X_n \in \{-L\} \times [-L, L]\}$, $T_L = \inf\{n : X_n \in \{L\} \times [-L, L]\}$, $S_{-L} = \inf\{n : X_n \in [-L, L] \times \{-L\}\}$, $S_L = \inf\{n : X_n \in [-L, L] \times \{L\}\}$. On notera $\mathcal{F}_n$ la tribu canoniquement associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que T_{-L} ,T_L et $T_{-L} \wedge T_L = \min\{T_{-L}, T_L\}$ sont des temps d'arret.
2. On note $\Lambda^\circ = [-L+1, L-1] \times [-L+1, L-1] \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Lambda$. Montrer que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$ la fonction $f : \Lambda \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) := ax + by + c$ est harmonique sur Λ°.
3. Supposons $X_0 = (x_0, y_0)$. Calculer $\mathbb{P}(T_{-L} < T_L)$ et $\mathbb{P}(S_{-L} < S_L)$.
4. On note $\partial\Lambda = \Lambda \setminus \Lambda^\circ$. Soit $u : \partial\Lambda \to \mathbb{R}$, on cherche $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tel que h est harmonique sur Λ° et $h|_{\partial\Lambda} = u$. Proposer une formule permettant de construire h. Cette solution est-elle unique ?
5. Dans cette question on suppose

$$u(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{si } x = -L \\ 0 & \text{si } x = L \\ -5 & \text{si } y = -L \text{ et } x \notin \{-L, L\} \\ 3 & \text{si } y = L \text{ et } x \notin \{-L, L\} \end{cases}$$

   Soit h comme dans la question précédente. Calculer $h(0, 0)$.
6. On pose $Y_n = \|X_n\|^2$ et on note $T = T_{-L} \wedge T_L \wedge S_{-L} \wedge S_L$. Montrer que $Y_{n\wedge T} - n \wedge T$ est une martingale.
7. Pour $X_0 = (0, 0)$, montrer que $L^2 \leq \mathbb{E}(T) \leq 2L^2$.

2 Correction

Solution 1. _

1. Notons $\xi_n^A = 1$ si Alice joue au tour n et 0 sinon. $(\xi_n^A)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des variables indépendante iid et $\mathbb{E}(\xi_1^A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Par la loi forte des grands nombres $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \xi_n^A \to \frac{1}{2}$ p.s. et donc $\sum_{n=1}^N \xi_n^A \to \infty$ p.s c'est à dire que Alice joue une infinité de fois avec probabilité 1. Même conclusion pour Bob, Claire et David.
2. Pour tout n, $0 \leq A_n \leq A_0+B_0+C_0+D_0$ donc $\mathbb{E}(|A_n|) < \infty$ et A_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable pour la tribu canoniquement associé au processus. À chaque temps n, on note $\zeta_n^A = 1$ si Alice joue et gagne , -1 si elle joue et perd et 0 si elle ne joue pas et m_n la mise au temps n. Puisque à chaque temps n

le dé est équilibré et indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}, m_n$. $\mathbb{E}(\zeta_n^A|\sigma(\mathcal{F}_{n-1}, m_n)) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= A_{n-1} + \mathbb{E}(\zeta_n^A m_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= A_{n-1} + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\zeta_n^A|\sigma(\mathcal{F}_{n-1}, m_n))m_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= A_{n-1}\end{aligned}$$

où on a utilisé que A_{n-1} est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable, que m_n est $\sigma(\mathcal{F}_{n-1}, m_n)$ et la propriété de concaténation de l'espérance conditionnel. Donc A_n est bien une martingale.

3. Puisque A_n est une martingale positive, elle converge p.s. Même chose pour B_n, C_n et D_n. Montrons que 0 et $S = A_0 + B_0 + C_0 + D_0$ sont les seules limites possibles. Soit $a \in (0, S)$ et supposons que $A_n \to a$. Puisque $B_n + C_n + D_n \to S - a$ l'une de ces trois martingales ne converge pas non plus vers 0. Par symmétrie supposons également que $B_n \to b$, $b \in (0, S)$. Alors A_n et B_n sont des suites de Cauchy donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|A_n - A_{n+1}| < \frac{1}{2}\eta \min(a, b)$. Or avec probabilité 1, A_n et B_n jouent ensemble une infinité de fois et à chaque temps i tel que c'est le cas $A_{i+1} = A_i \pm \eta \min(A_n, B_n)$ il existe donc une suite infinie de temps i tel que $|A_{i+1} - A_i| \to \eta \min(a, b)$. Absurde.
4. La martingale étant uniformément bornée par S elle converge dans L^1. Puisque A_n est une martingale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(A_0) = \mathbb{E}(A_n) &= \mathbb{E}(1_{A_n \to 0} A_n) + \mathbb{E}(1_{A_n \to S} A_n) \\ &\to 0 \times \mathbb{P}(A_n \to 0) + S \times \mathbb{P}(A_n \to S)\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$ par la convergence L^1. Ainsi $\mathbb{P}(A_n \to S) = \frac{A}{S}$ et $\mathbb{P}(A_n \to 0) = 1 - \frac{A}{S}$.
5. A_n est une martingale et $x \to \log(x)$ est une fonction concave donc $\log(A_n)$ est une surmartingale (Jensen).
6. On a ici $A_n = (1 + \eta\zeta_n^A)A_{n-1}$ donc $\log A_n = \log A_0 + \sum_{i=1}^n \log(1 + \eta\zeta_n^A)$. On a ici une somme de variable indépendantes iid. Donc par la loi forte des grands nombre

$$\frac{1}{n}\log A_n \to \mathbb{E}(\log(1 + \eta\zeta_1^A)) = \frac{1}{2}\log(1 - \eta^2)$$

p.s. Puisque $\log(1 - \eta^2) < 0$, $\log A_n \to -\infty$ c'est à dire $A_n \to 0$ p.s.
7. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\log A_n + \alpha n|\mathcal{F}_n) &= \log A_{n-1} + \alpha(n-1) + \mathbb{E}(\log(1 + \eta\zeta_1^A)|\mathcal{F}_n) + \alpha \\ &= \log A_{n-1} + \alpha(n-1) + ((\frac{1}{2}\log(1 - \eta^2)) + \alpha)\end{aligned}$$

$\log A_n + \alpha n$ est il une martingale ssi $\alpha = -\frac{1}{2}\log(1 - \eta^2) = -\frac{1}{2}\log(\frac{3}{4})$.

8. Par la définition de T, $A_{T-1} \geq 10^{-10}$, $A_T \leq 10^{-10}$ et donc $A_T \geq (1-\eta)A_{T-1} \geq \frac{1}{2}10^{-10}$. Puisque $A_n \to 0$ p.s on a que $T < \infty$ p.s. . Pour tout n, $A_n \leq (1+\eta)^n A_0$ et donc

$$|\log A_{n\wedge T} + \alpha n \wedge T| \leq (\log 2 + |\alpha|) n \wedge T.$$

Par le théorème de l'arret pour tout n,

$$0 = \mathbb{E}(\log A_0) = \mathbb{E}(\log A_{n\wedge T} + \alpha n \wedge T)$$

donc

$$\mathbb{E}(n \wedge T) = -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(\log A_{n\wedge T}) \leq -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(\log(\frac{1}{2}10^{-10})) = \frac{10\log 10 + \log 2}{\alpha}.$$

Puis $n\wedge T$ est croissante et converge vers T, $\mathbb{E}(n\wedge T) \to \mathbb{E}(T)$. Conclusion $\mathbb{E}(T) \leq \frac{10\log 10+\log 2}{\alpha} < \infty$. Pour tout n, $|\log A_{n\wedge T} + \alpha n \wedge T| \leq (\log 2 + |\alpha|)T$ donc pas convergence dominée

$$0 = \mathbb{E}(\log A_{n\wedge T} + \alpha n \wedge T) \to \mathbb{E}(\log A_T) + \alpha\mathbb{E}(T)$$

et donc

$$\frac{10\log 10}{\alpha} \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{10\log 10 + \log 2}{\alpha}.$$

Dans la question 6, on trouvait que $\log A_n \sim -\alpha n$ pour n grand. On pouvait alors s'attendre à $\alpha T \approx -\log(A_T) = 10\log 10$.

Solution 2. _

1. On a

$$\{T_{-L} = n\} = \cap_{i<n}\{X_i \notin \{-L\} \times [-L, L]\} \cap \{X_n \in \{-L\} \times [-L, L]\}$$

puisque X_n est trivialement adapté, chacun de ces ensemble est $\mathcal{F}_n$ mesurable donc $\{T_{-L} = n\} \in \mathcal{F}_n$. Même chose pour T_L et on utilise ensuite que le minimum de deux temps d'arret est un temps d'arret.

2. On calcule pour tout $(x, y) \in \Lambda^\circ$

$$\begin{aligned} Qf(x,y) &= \frac{1}{4}\left(f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(a(x+1) + by + c + a(x-1) + by + c \\ &\quad + ax + b(y+1) + c + ax + b(y-1) + c) \\ &= ax + by + c \end{aligned}$$

donc $f(x, y)$ bien harmonique sur Λ°.

3. On choisit $f(x, y) = x$ qui est harmonique par la question précédente $(a = 1, b = c = 0)$ sur Λ°. Par le même calcule on montre quelle est harmonique sur $[-L+1, L-1]\times[-L, L]$ donc $x_{n\wedge T_{-L}\wedge T_L} = f(X_{n\wedge T_{-L}\wedge T_L})$

est une martingale. Elle uniformément bornée dans $[-L, L]$, donc elle converge p.s et dans L^1. Elle est à valeur entière donc elle est constante à partir d'un certain rang c'est à dire $T_{-L} \wedge T_L < \infty$ p.s (donc $L, -L$ sont les seuls limites possible). On a alors

$$x_0 = \mathbb{E}(x_0) = \mathbb{E}(x_{n\wedge T_{-L}\wedge T_L}) \to \mathbb{E}(x_{T_{-L}\wedge T_L})$$

donc

$$x_0 = \mathbb{E}(x_{T_{-L}\wedge T_L}) = -L\times\mathbb{P}(T_{-L} < T_L)+L\times\mathbb{P}(T_{-L} > T_L) = -2L\mathbb{P}(T_{-L} < T_L)+L$$

et finalement $\mathbb{P}(T_{-L} < T_L) = \frac{L-x}{2L}$. De même avec la fonction $f(x, y) = y$ on obtient $\mathbb{P}(S_{-L} < S_L) = \frac{L-y}{2L}$.

4. Pour le problème de Dirichlet on a la solution suivante

$$h(x) = \mathbb{E}_x(u(X_T))$$

avec $T = T_{-L} \wedge T_L \wedge S_{-L} \wedge S_L$. Puisque $T < \infty$ et le domaine borné, c'est l'unique solution.

5. Par symmétrie de cette chaine de markov. En partant du centre du carré, chaque côté a la même probabilité d'être atteint en premier et on ne peut pas toucher un coin sans atteindre un côté avant. Donc

$$\mathbb{P}(T = T_{-L}) = \mathbb{P}(T = T_L) = \mathbb{P}(T = S_L) = \mathbb{P}(T = S_{-L}) = \frac{1}{4}.$$

En utilisant la formule de la question précédente

$$\begin{aligned} h(0, 0) &= \mathbb{P}(T = T_{-L})u(X_{T_{-L}}) + \mathbb{P}(T = T_L)u(X_{T_L}) + \mathbb{P}(T = S_{-L})u(X_{S_{-L}}) + \mathbb{P}(T = S_L)u(X_{S_L}) \\ &= \frac{1}{4}(6 + 0 - 5 + 3) = 1 \end{aligned}$$

6. Ce processus est trivialement adapté et $|Y_{n\wedge T} - n \wedge T| \leq L^2 + n < \infty$. On calcule alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n\wedge T} - n \wedge T|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(1_{T\leq(n-1)}(Y_T - T)|\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(1_{T\geq n}(Y_n - n)|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= 1_{T\leq(n-1)}(Y_T - T) + 1_{T\geq n}\mathbb{E}((x_n^2 + y_n^2 - n)|(x_{n-1}, y_{n-1})) \\ &= 1_{T\leq(n-1)}(Y_T - T) + 1_{T\geq n}(\frac{1}{4}((x_{n-1} + 1)^2 + y_{n-1}^2 + (x_{n-1} - 1)^2 + y_{n-1}^2 \\ &\quad + (y_{n-1} + 1)^2 + x_{n-1}^2 + (y_{n-1} - 1)^2 + x_{n-1}^2) - n) \\ &= 1_{T\leq(n-1)}(Y_T - T) + 1_{T\geq n}((x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + 1) - n) \\ &= 1_{T\leq(n-1)}(Y_T - T) + 1_{T\geq n}(Y_{n-1} - n - 1) \\ &= Y_{(n-1)\wedge T} - (n - 1) \wedge T \end{aligned}$$

qui donc est une martingale.

7. $(x_{n\wedge T})$ et $(y_{n\wedge T})$ sont des martingales uniformément bornées donc elle convergent dans L^2. On a alors que $Y_{n\wedge T} = x_{n\wedge T}^2 + y_{n\wedge T}^2$ converge dans L^1. Par convergence monotone on a également que $n \wedge T$ converge dans L^1 vers T. Conclusion

$$0 = \mathbb{E}(Y_0 - 0) = \mathbb{E}(Y_{n\wedge T} - n \wedge T) \to \mathbb{E}(Y_T) - \mathbb{E}(T).$$

soit $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y_T)$. On peut conclure en regardant les distances minimale et maximal entre $(0,0)$ et un point du carré : $L^2 \leq Y_T \leq 2L^2$.