Analyse Série 12.

December 11, 2020

Exercice 1:
Rappel propriétés du log:
-$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$, et $\log 1 = 0$
-$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.
-$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

–
Première méthode
$\frac{d}{dx}[\log x^r] = (\frac{d}{dx}x^r)\frac{1}{x^r} = rx^{r-1}\frac{1}{x^r} = \frac{r}{x}$.
$\frac{d}{dx}[r\log x] = \frac{r}{x}$.
Les dérivées sont égale donc les fonctions sont égale à une constante près. Donc

$$\log x^r = r\log x + C$$

or en $x = 1$, $0 = 0 + C$ donc $C = 0$.

–
Deuxième méthode

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \frac{1}{r}\int_1^x \frac{rt^{r-1}}{t^r}dt$$

faire le changement de variable $u = t^r$, $du = rt^{r-1}dt$

$$= \frac{1}{r}\int_1^{x^r} \frac{du}{u} = \frac{1}{r}\log x^r.$$

–
Troisième méthode:
Puisque $\log(x^{k+1}) = \log(x) + \log(x^k)$ on directement que $\log x^k = k\log x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$.

$$q\log x^{p/q} = \log x^p = p\log x$$

Alors $\log x^{p/q} = \frac{p}{q}\log x$.
On conclue pour les $\mathbb{Q}_-$ $\log x^{-r} = -\log x^r$.

–
Exercice 3:

Rappel pour les fonctions usuelles:
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leftrightarrow \sin(x)$
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \leftrightarrow \cos(x)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \leftrightarrow \tan(x)$
Pour toute relation sur les sin et cos, il existe une relation entre coshet sinh similaire.

—

a)

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

(Remarque :$\cos^2 + \sin^2 = 1$)
b)

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

(Remarque: $\cos'(x) = -\sin(x)$)
c)

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

d)

$$\tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh(x)^2} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh(x)^2} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

(Remarque : $\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$)
e)Calculer On utilise $\cosh^2(u) - 1 = \sinh^2(u)$

$$\begin{aligned}\log(\cosh(u) + \sqrt{\cosh^2(u) - 1}) &= \log(\cosh(u) + \sinh(u)) \\ &= \log exp(u) \\ u\end{aligned}$$

Conclusion la fonction $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est bien la fonction inverse de $\cosh(x)$. Donc $\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = arcosh(x)$ par définition.
f)

$$\begin{aligned}&\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} \\ &= \cosh(x+y)\end{aligned}$$

(Remarque: $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$)

$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$\bar{\text{E}}$xercice 4:

$-$

$$T_n \exp(x:0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

(Rappel : $\exp'(x) = \exp(x)$ donc pour tout n, $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$, Donc pour tout n, $\exp^{(n)}(0) = 1$).

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_{x\to 0}(x^n)$$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$\bar{T}_n \log(x:1) = \sum ...(x-1)^k$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} ... + o_{x\to 0}(x^n).$$

$\log(1) = 0$, $\log(1+x)' = \frac{1}{1+x}$, $\log(1+x)^{(2)} = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $\log(1+x)^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3}$

$$\log(1+x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

(Preuve par récurence)

$$\log(1+x)^{(n+1)} = (-1)^{n-1}(-\frac{n(n-1)!}{(1+x)^{n+1}}).$$

En 1 on

$$\log(1)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!} + o_{x\to 0}(x^n) == \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} + o_{x\to 0}(x^n).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...$$

$\bar{\text{A}}$utre méthode:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

On sait que $\log(1+x)' = \frac{1}{1+x}$ donc

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x 1 - t + t^2 - ... + (-1)^n t^n + o_{x\to 0}(t^n)dt$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x o_{x\to 0}(t^n)dt$$

Propriété : on peut intégrer des $o(...)$.

En effet $f(t) = o_{x\to 0}(t^n)$: Pour tout ϵ il existe $\delta > 0$ $|f(t)| \le \epsilon t^n$ pour tout $t < \delta$.

$$\int_0^x |f(t)|dt \le \epsilon \int_0^x t^n dt$$

Donc

$$\int_0^x o_{x\to 0}(t^n)dt = o_{x\to 0}(\int_0^x t^n dt) = o(x^{n+1})$$

On a donc bien que

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

— Attention : Interdiction de dériver des $o(...)$. On n'a pas $f(t) = o(g(t))$ n'implique pas $f'(t) = o(g'(t))$.

— Autre Méthode Bis : Polynome de Taylor de $\arctan(x)$.

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\arctan(x) = \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

— Exercice 6:

— Si $a > b > 0$, pour $p > q > 0$

$$e^{ax} \gg e^{bx} \gg x^p \gg x^q \gg \log x$$

en $x \to \infty$.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\log x)^n} = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^{1/n}}{\log x})^n$$

On sait que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/n}}{\log x} = \infty$ Donc $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^{1/n}}{\log x})^n = \infty$.

b)

$$\lim_{x\to 0, x>0} x(\log x)^n = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u}(\log \frac{1}{u})^n = \lim_{u\to\infty} \frac{(-\log u)^n}{u} = 0$$

En $x \to 0$: pour tout $q > 0$

$$\frac{1}{x^q} \gg -\log x$$

En réutilisant le a)

c)

$$\lim_{x\to 0, x>0} x^x = \lim_{x\to 0, x>0} e^{x\log x}$$

Par b) on $x\log x \to 0$. Donc $\lim_{x\to 0} e^{x\log x} = e^0 = 1$ (car *exp* est continue.)

$\bar{\text{E}}$xercice 8

$\bar{\text{R}}$appel $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to \infty$ pour $n \to \infty$. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log n$

a)

Montrer que

$$\frac{1}{k} \geq \log(k+1) - \log(k) \geq \frac{1}{k+1}.$$

$\log(k+1) - \log(k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt$. On a pour tout $t \in [k, k+1]$,$t \leq k+1$ donc $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$ donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dt = \frac{1}{k+1}$$

De même pour tout $t \in [k, k+1]$,$t \geq k$ donc $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt = \frac{1}{k}$$

Conclusion

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}$$

b)

$u_k = \frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k)$ et $v_k = u_1 + \cdots + u_n$.

On a que $v_n - v_{n-1} = u_n = \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log(n) \geq 0$ car $\frac{1}{n} \geq \log(n+1) - \log(n)$ de la question a). Donc v_n est croissante.

Puisque $\log(k+1) - \log(k) \geq \frac{1}{k+1}$, $u_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Alors

$$v_n = \sum^n u_k \leq \sum^n (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Conclusion $v_n$est borné par 1.

c)

v_n est croissante et borné donc v_n converge. Il existe $\gamma = \lim_{n\to\infty} v_n$.

On remarque que

$$v_n = \sum^n \frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k) = \sum^n \frac{1}{k} - \log(n+1)$$

De plus $\log(n) - \log(n+1) \leq \frac{1}{n} \to 0$.

—

Exercice 5:

$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ C'est équivalent à $e^{\sqrt{x}\log x} = e^{x \log \sqrt{x}}$. L'exponentielle est injective donc $\sqrt{x}\log x = x \log \sqrt{x}$. On cherche alors $\sqrt{x}\log x = \frac{x}{2}\log x$

Cas 1: $\log x = 0$ c'est à dire $x = 1$. Qui est bien une solution.

Cas 2: $\log x \neq 0$ alors $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$ et donc $x = \frac{x^2}{4}$ soit $0 = \frac{x(x-4)}{4}$. C'est à dire $x = 0$ (impossible $x > 0$) ou $x = 4$. Qui est aussi une solution car $4^2 = 2^4$

Les solutions sont donc $x = 4$ et $x = 1$.