Devoir du cours martingale et mouvement brownien

12 juin 2020

Enoncé

Durée : 3h, les notes de cours ne sont pas autorisés.

1 Martingale discrète

Question de cours : Montrer que le maximum de plusieurs temps d'arret est un temps d'arret.

Problème 1. On considère un jeu avec N joueurs. Chaque joueurs i dispose de $X_0^{(i)}$ pièces au début de la partie. À chaque tour n, deux joueurs misent chacun une pièce et la joue à « pile ou face ». Le gagnant garde les deux pièces. On peut noter les résultats des lancés « pile où face » $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ qui sont des variables iid avec $\mathbb{P}(P_1 = 1) = \mathbb{P}(P_2 = -1) = \frac{1}{2}$. On note la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(P_1, \cdots, P_n)$. Le couple de joueur $(i_n, , j_n) \in [1, N]^2$ est un processus prévisible de tel sorte que $X_n^{(i_n)} > 0$ et $X_n^{(j_n)} > 0$, c'est à dire chacun des deux joueurs a au moins une pièce. La partie se termine lorsque tous les joueurs sont ruinés sauf un. Le dernier joueur ayant encore de l'argent gagne la partie.

1. Montrer que pour tout i, $X^{(i)}$ est une martingale.
2. Montrer que le jeu se termine p.s. Quelle est la situation finale ?
3. Quelle est la probabilité que le joueur i remporte la partie ?
4. Proposer un processus prévisible $A_n^{(i)}$ telle que $(X^{(i)})_n^2 - A_n^{(i)}$ soit une martingale.
5. En moyenne à combien de lancés de pile-ou-face le joueur i participera t-il ?
6. Combien de temps dure la partie en moyenne ? Pour 10 joueurs et $\sum_{i=1}^{10} X_0^{(i)} = 110$, préciser pour quelle configuration initiale la partie dure en moyenne le plus longtemps.
7. Un tricheur s'invite dans la partie, il commence avec seulement une pièce mais lorsqu'il joue à pile ou face, sa probabilité de gain et $\frac{2}{3}$ et non plus $\frac{1}{2}$. Avec quelle probabilité gagnera t il la partie ?

2 Martingale continue

Question de cours : Enoncer et démontrer la formule d'intégration par partie dans le cas de martingales continues.

Problème 2. Soit M_t une martingale continue bornée dans L^2. On note $\langle M, M\rangle_t$ sa variation quadratique et on supposera que $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_1) = 1$. On pose

$$S_n^{(N)} := \sum_{k=1}^{n} M_{\frac{k}{N}}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}}).$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_N^{(N)})$. Le processus $(S_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ est-il une martingale ?
2. Montrer que pour $N \to \infty$, $S_N^{(N)}$ converge en proba et on précisera la limite.
3. Montrer que pour $N \to \infty$, $\sum_{k=1}^{N}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})^3 \to 0$.
4. Résoudre l'équation stochastique
$$N_t = 1 + \int_0^t N_s dB_s$$
où B_t est un mouvement brownien.

Problème 3. On considère $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ issu de $(0,0)$, c'est à dire que $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}$ sont deux mouvement brownien indépendant.

1. Calculer $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_t\|^2)$ et montrer que $\|\boldsymbol{B}_t\|^2 - \mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_t\|^2)$ est une martingale.
2. Soit $R > 0$ et $T = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t\| = R\}$. Calculer $\mathbb{E}(T)$.
3. Soit $x > 0$, Dans cette question et pour la suite $\boldsymbol{B}_t$ est le mouvement brownien issu de $(x, 0)$. En supposant que p.s $B_t \neq 0$ pour tout $t > 0$. Avec la formule d'ito exprimer $\|B_t\| = M_t + A_t$ où M_t est une martingale et A_t un processus à variation fini.
4. Montrer que $\|B_t\|$ est une sousmartingale.
5. Montrer que M_t est un mouvement brownien.
6. Montrer que $\ln(\|B_t\|)$ est une martingale. (On pourra utiliser le laplacien en coordonné polaire $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial}{\partial r}f] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$.)
7. Pour $0 < r < x < R$ $T_r = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t\| = r\}$, $T_R = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t\| = R\}$, Donner $\mathbb{P}(T_r \leq T_R)$.
8. Pour $\boldsymbol{B}_t$ un mouvement brownien en dimension $d \geq 3$ issu de $(x, 0, \cdots, 0)$. Calculer $\mathbb{P}(T_r < \infty)$. (On pourra proposer une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d/\{0\}$).

Correction

3 Martingale discrète

Question de cours : Soit $(T_i)_{i\in I}$ des temps d'arret. Alors

$$\{\max_{i\in I} T_i \leq n\} = \cap_{i\in I}\{T_i \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

car $\{T_i \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $i \in I$.

Solution 1. On considère un jeu avec N joueurs. Chaque joueurs i dispose de $X_0^{(i)}$ pièces au début de la partie. À chaque tour n, deux joueurs misent chacun une pièce et la joue à « pile ou face ». Le gagnant garde les deux pièces. On peut noter les résultats des lancés « pile où face » $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ qui sont des variables iid avec $\mathbb{P}(P_1 = 1) = \mathbb{P}(P_2 = -1) = \frac{1}{2}$. On note la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(P_1, \cdots, P_n)$. Le couple de joueur $(i_n, , j_n) \in [1, N]^2$ est un processus prévisible de tel sorte que $X_n^{(i_n)} > 0$ et $X_n^{(j_n)} > 0$, c'est à dire chacun des deux joueurs a au moins une pièce. La partie se termine lorsque tous les joueurs sont ruinés sauf un. Le dernier joueur ayant encore de l'argent gagne la partie.

1. On a

$$X_{n+1}^{(i)} = \begin{cases} X_n^{(i)} & \text{si } i \notin \{i_{n+1}, j_{n+1}\} \\ X_n^{(i)} + 1 & \text{si } i = i_{n+1} \text{ et } P_{n+1} = 1 \text{ ou } i = j_{n+1} \text{ et } P_{n+1} = -1 \text{ (gain)} \\ X_n^{(i)} - 1 & \text{si } i = i_{n+1} \text{ et } P_{n+1} = -1 \text{ ou } i = j_{n+1} \text{ et } P_{n+1} = 1 \text{ (perte)} \end{cases}$$

   Par récurence immédiate on a que $X_n^{(i)}$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable et $\mathbb{E}(|X_n^{(i)}|) < \infty$. De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}^{(i)}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_n^{(i)} + 1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}}(1_{\text{gain}} - 1_{\text{perte}})|\mathcal{F}_n) \\ &= X_n^{(i)} + 1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}}\mathbb{E}(1_{\text{gain}} - 1_{\text{perte}})|\mathcal{F}_n) \\ &= X_n^{(i)} + 1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \\ &= X_n^{(i)} \end{aligned}$$

   où on a utilisé que $1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}}$ est prévisible et que gain et perte sont indépendant de $\mathcal{F}_n$. Donc $X^{(i)}$ est une martingale.

2. Notons $C = \sum_{i=1}^N X_0^{(i)}$ le nombre totale de pièces. Pour tout i, et $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq X_n^{(i)} \leq C$ est donc une martingale bornée. Elle converge donc p.s. Puisqu'elle est à valeur entière elle est constante à partir d'un certain rang. Notons τ_i ce rang. Alors pour un $n_{\max} = \max_{i\leq N} \tau_i$ tous les $X_{n_{\max}}^{(i)}$ sont ou 0 ou C et la partie est donc terminée. Un joueurs a alors toutes les pièces et les autres n'ont plus rien.

3. Notons $T_0^{(i)} = \inf\{n : X_n^{(i)} = 0\}$ et $T_C^{(i)} = \inf\{n : X_n^{(i)} = C\}$. Le joueur i remporte la partie si $T_C^{(i)} < T_0^{(i)}$. Puisque $X^{(i)}$ est une martingale, pour tout n on a

$$\begin{aligned} X_0^{(i)} = \mathbb{E}(X^{(i)}_{n\wedge T_C^{(i)}\wedge T_0^{(i)}}) \to \mathbb{E}(X^{(i)}_{T_C^{(i)}\wedge T_0^{(i)}}) \\ = \mathbb{E}(1_{T_C^{(i)}<T_0^{(i)}} X^{(i)}_{T_C^{(i)}} + X^{(i)}_{T_0^{(i)}} 1_{T_C^{(i)}<T_0^{(i)}}) \\ = \mathbb{P}(T_C^{(i)} < T_0^{(i)})C \end{aligned}$$

où on a utilisé que $T_0^{(i)} \wedge T_C^{(i)} < \infty$ p.s par la question précédent,la convergence dominé avec $0 \leq X^{(i)}_{n\wedge T_C^{(i)}\wedge T_0^{(i)}} \leq C$ et $X^{(i)}_{T_C^{(i)}} = C$, $X^{(i)}_{T_0^{(i)}} = 0$. On a donc

$$\mathbb{P}(\text{Le joueur } i \text{ gagne}) = \frac{X_0^{(i)}}{\sum_{j=1}^N X_0^{(j)}}.$$

4. On a

$$(X_{n+1}^{(i)})^2 = \begin{cases} (X_n^{(i)})^2 & \text{si } i \notin \{i_{n+1}, j_{n+1}\} \\ (X_n^{(i)})^2 + 2X_n^{(i)} + 1 & \text{(gain)} \\ (X_n^{(i)})^2 - 2X_n^{(i)} + 1 & \text{(perte)} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X^{(i)})^2_{n+1} - A^{(i)}_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= (X^{(i)})^2_n + 1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}} + 2X_n^{(i)}\mathbb{E}(1_{\text{gain}} - 1_{\text{perte}}|\mathcal{F}_n) - A^{(i)}_{n+1} \\ &= (X^{(i)})^2_n + 1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}} - A^{(i)}_{n+1} \end{aligned}$$

Où on a utilisé que A_{n+1} et $1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}}$ sont $\mathcal{F}_n$ mesurable et que $1_{\text{gain}}, 1_{\text{perte}}$ sont indépendant de $\mathcal{F}_n$. Conclusion $(X^{(i)})^2_n - A_n^{(i)}$ est une martingale ssi $-A_n^{(i)} = 1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}} - A^{(i)}_{n+1}$ soit $A^{(i)}_{n+1} - A^{(i)}_n = 1_{i\in\{i_{n+1},j_{n+1}\}}$. Alors $A_n^{(i)} = \sum_{k=1}^n 1_{i\in\{i_k,j_k\}}$, c'est à dire le nombre de lancé de pile ou face auquel le joueur i a participé jusqu'au temps n.

5. Puisque $(X^{(i)})^2_n - A_n^{(i)}$ est une martingale, pour tout n

$$\begin{aligned} (X_0^{(i)})^2 = \mathbb{E}((X^{(i)})^2_n - A_n^{(i)}) \to \mathbb{E}((X^{(i)})^2_{T_C^{(i)}\wedge T_0^{(i)}} - A^{(i)}_{T_C^{(i)}\wedge T_0^{(i)}}) \\ = C^2\mathbb{P}(T_C^{(i)} < T_0^{(i)}) - \mathbb{E}(A^{(i)}_{T_C^{(i)}\wedge T_0^{(i)}}) \end{aligned}$$

où on a utilisé que la convergence dominé avec $0 \leq (X^{(i)})^2_n \leq C^2$ et la convergence monotone pour $A_n^{(i)}$. Avec la question 3 on a alors

$$\mathbb{E}(A^{(i)}_{T_C^{(i)}\wedge T_0^{(i)}}) = CX_0^{(i)} - (X_0^{(i)})^2.$$

6. À chaque lancé de pile ou face, 2 joueurs participes. Ainsi le nombre total de lancés au temps n est donc égale à $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} A_n^{(i)}$. Il y aura alors en moyenne

$$\mathbb{E}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} A_{n_{\max}}^{(i)}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(CX_0^{(i)} - (X_0^{(i)})^2) = \frac{1}{2}(C^2 - \sum_{i=0}^{N}(X_0^{(i)})^2)$$

lancés de pile ou face au total. Pour 10 joueurs et $\sum_{i=1}^{10} X_0^{(i)} = 110$ il s'agit de maximiser $\sum_{i=0}^{N}(X_0^{(i)})^2$. Par la convexité de $x \to x^2$ on a

$$11^2 = (\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} X_0^{(i)})^2 \leq \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(X_0^{(i)})^2$$

Le minimum est donc atteint si $X_0^{(i)} = 11$ pour tout i.

7. On note R_n le nombre de pièce du tricheur (R_0 =1). Montrons que $N_n := \frac{1}{2^{R_n}}$ est une martingale. On a

$$N_{n+1} = \begin{cases} N_n & \text{si il ne joue pas} \\ \frac{1}{2}N_n & \text{(gain)} \\ 2N_n & \text{(perte)} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= N_n 1_{\text{ne joue pas}} + N_n 1_{\text{joue}}\mathbb{E}(\frac{1}{2}1_{\text{gain}} + 21_{\text{perte}})|\mathcal{F}_n) \\ &= N_n 1_{\text{ne joue pas}} + N_n 1_{\text{joue}}(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3}) \\ &= N_n 1_{\text{ne joue pas}} + N_n 1_{\text{joue}} \\ &= N_n \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = N_0 &= \mathbb{E}(N_n) \\ &\to \mathbb{E}(N_{n_{\max}} 1_{\text{gain de la partie}} + N_{n_{\max}} 1_{\text{perte de la partie}}) \\ &= \mathbb{P}(\text{perte de la partie}) + \frac{1}{2^{1+C}}\mathbb{P}(\text{gain de la partie}) \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbb{P}(\text{gain de la partie}) = \frac{1 - 1/2}{1 - 1/2^{1+C}}.$$

4 Martingale continue

Question de cours : Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux semimartingale continues, alors

$$\int_0^t Y_s dX_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t X_s dY_s - \langle X, Y\rangle_t$$

En effet avec la formule d'Ito pour $f(x,y)=xy$, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}=0$ on a

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_t dY_t + \int_0^t Y_t dX_t + \int_0^t d\langle X,Y\rangle_s$$

et on conclue puisque $\int_0^t d\langle X,Y\rangle_s = \langle X,Y\rangle_t$.

Solution 2. Soit M_t une martingale continue bornée dans L^2. On note $\langle M,M\rangle_t$ sa variation quadratique et on supposera que $\mathbb{E}(\langle M,M\rangle_1)=1$. On pose

$$S_n^{(N)} := \sum_{k=1}^n M_{\frac{k}{N}}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}}).$$

1. La somme ici n'est pas sous la forme usuelle avec un processus previsible et la différence de martingale. Cependant on peut facilement le faire apparaitre.

$$\begin{aligned} S_n^{(N)} &= \sum_{k=1}^n M^2_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}} M_{\frac{k}{N}} \\ &= \sum_{k=1}^n M^2_{\frac{k}{N}} - M^2_{\frac{k-1}{N}} - (M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})M_{\frac{k-1}{N}}. \\ &= M^2_{\frac{n}{N}} - M_0^2 - \sum_{k=1}^n (M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})M_{\frac{k-1}{N}}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est bien une martingale. On a alors

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n (M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})M_{\frac{k-1}{N}}.\Big) = 0$$

Et donc $\mathbb{E}(S_N^{(N)}) = \mathbb{E}\big(M_1^2 - M_0^2\big)$. Enfin puisque $M_t^2 - \langle M,M\rangle_t$ est une martingale $\mathbb{E}\big(M_1^2 - \langle M,M\rangle_1\big) = \mathbb{E}(M_0^2)$ soit

$$\mathbb{E}\big(M_1^2 - M_0^2\big) = \mathbb{E}(\langle M,M\rangle_1) = 1.$$

Le processus $(S_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une martingale $1=\mathbb{E}(S_N^{(N)}) \neq \mathbb{E}(S_0^{(N)}) = 0$.

2. Puisque $\max_k |\frac{k}{N} - \frac{(k-1)}{N}| = \frac{1}{N} \to 0$ lorsque $N\to\infty$. On a la convergence en proba vers l'intégrale stochastique

$$\sum_{k=1}^N (M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})M_{\frac{k-1}{N}} \to \int_0^1 M_s dM_s.$$

On peut également mentionner qu'elle est égale à $\frac{1}{2}(M_1^2 - M_0^2 - \langle M,M\rangle_1)$. Ainsi

$$S_N^{(N)} \to M_1^2 - M_0^0 - \int_0^1 M_s dM_s = \frac{1}{2}(M_1^2 - M_0^2) + \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_1$$

3. La preuve ici est la même que pour montrer que les martingales continues à variation fini sont constante. On a

$$\sum_{k=1}^{N}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})^3 \leq \sup_k |M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}}| \sum_{k=1}^{N}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})^2.$$

Or puisque $(M_t)_{t\geq 0}$ est continue elle est donc uniformément continue sur $[0,1]$ et alors $\sup_k |M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}}| \to 0$ pour $N \to \infty$. De plus on a $\sum_{k=1}^{N}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})^2 \to \langle M, M\rangle_1$ et donc le produit de ces deux termes converge vers 0.

4. L'équation stochastique stochastique peut aussi s'écrire ainis

$$dN_s = N_s dB_s, \quad N_0 = 1,$$

soit $dN_s = \sigma(s, N_s)dB_s$ où $\sigma(s,x) = x$. C'est une fonction lipshitzienne borné par $1+|x|$, on a donc existence et unicité trajectorielle pour cette équation. Naivement en s'inspirant de $dy = yds$ on pourrait essayer $N_s = e^{B_s}$, cependant il manque le terme d'Ito. Par ailleurs on remarque que par définition de l'intégrale stochastique on sait que $(N_t)_{t\geq 0}$ est une martingale. On peut alors essayer $N_s = e^{B_s - \frac{1}{2}s}$. Par la formule d'Ito on a

$$N_t = 1+\int_0^t e^{B_s-\frac{1}{2}s}dBs - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s-\frac{1}{2}s}ds + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s-\frac{1}{2}s}ds = 1+\int_0^t N_s dB_s$$

et par unicité trajectorielle c'est la seule solution possible.

Problème 4. On considère $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ issu de $(0,0)$, c'est à dire que $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}$ sont deux mouvement brownien indépendant.

1. On a $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_t\|^2) = \mathbb{E}(|\boldsymbol{B}_t^{(1)}|^2 + |\boldsymbol{B}_t^{(2)}|^2) = 2t$. Ensuite $|\boldsymbol{B}_t^{(1)}|^2 - t$ et $|\boldsymbol{B}_t^{(2)}|^2 - t$ sont des martingales car ce sont des mouvements brownien et donc $(|\boldsymbol{B}_t^{(1)}|^2 - t) + (|\boldsymbol{B}_t^{(2)}|^2 - t)$ est une martingale.
2. On sait que $\|\boldsymbol{B}_t\|^2 - 2t$ est une martingale. Donc pour tout t

$$0 = \mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_0\|^2 - 2\times 0) = \mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_{t\wedge T}\|^2 - 2t\wedge T)$$

On a $T < \infty$ p.s car $\mathbb{P}(\|B_t\| < R) \to 0$ pour $t\to\infty$. On a $\frac{1}{2}\mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_{t\wedge T}\|^2) = \mathbb{E}(t\wedge T) \to \mathbb{E}(T)$ par croissance monotone. $\frac{1}{2}\mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_{t\wedge T}\|^2) \to \frac{1}{2}\mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_T\|^2) = \frac{1}{2}R^2$ par convergence dominé. Alors $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{2}R^2$.
3. On utilise la formule d'ito avec $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) =$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{B}_t\| &= x + \int_0^t \frac{B_s^{(1)}}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2}} dB_s^{(1)} + \int_0^t \frac{B_s^{(2)}}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2}} dB_s^{(2)} \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2}} - \frac{|B_s^{(1)}|^2}{(|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2)^{3/2}} ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2}} - \frac{|B_s^{(2)}|^2}{(|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2)^{3/2}} ds \\
&= x + \int_0^t \frac{B_s^{(1)}}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2}} dB_s^{(1)} + \int_0^t \frac{B_s^{(2)}}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2}} dB_s^{(2)} \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2 + |B_s^{(2)}|^2}} ds
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\frac{|B_s^{(1)}|^2}{(|B_s^{(1)}|^2+|B_s^{(2)}|^2)^{3/2}} + \frac{|B_s^{(2)}|^2}{(|B_s^{(1)}|^2+|B_s^{(2)}|^2)^{3/2}} = \frac{1}{(|B_s^{(1)}|^2+|B_s^{(2)}|^2)^{1/2}}$. On pose M_t le premier terme qui par définition de l'intégrale stochastique est une martingale continue et A_t le deuxième terme qui est C^1 et donc à variation fini.

4. Puisque $\frac{1}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2+|B_s^{(2)}|^2}} > 0$, A_t est strictement croissante. On a alors

$$\mathbb{E}(\|B_t\| | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t + A_t|\mathcal{F}_s) = M_s + A_s + \mathbb{E}((A_t - A_s)|\mathcal{F}_s) \geq \|B_s\|$$

car $(A_t - A_s) \geq 0$.

5. Calculons $\langle M, M\rangle_t$. En notant $K_1 = \frac{B_s^{(1)}}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2+|B_s^{(2)}|^2}}$ et $K_2 = \frac{B_s^{(2)}}{\sqrt{|B_s^{(1)}|^2+|B_s^{(2)}|^2}}$. On a

$$\begin{aligned}
&\langle (K_1 \cdot B^{(1)} + K_2 \cdot B^{(2)}), (K_1 \cdot B^{(1)} + K_2 \cdot B^{(2)})\rangle \\
&= \langle K_1 \cdot B^{(1)}, K_1 \cdot B^{(1)}\rangle + \langle K_2 \cdot B^{(2)}, K_2 \cdot B^{(2)}\rangle \\
&+ \langle K_2 \cdot B^{(2)}, K_1 \cdot B^{(1)}\rangle + \langle K_1 \cdot B^{(1)}, K_2 \cdot B^{(2)}\rangle \\
&= K_1^2 \cdot \langle B^{(1)}, B^{(1)}\rangle + K_2^2 \cdot \langle B^{(2)}, B^{(2)}\rangle \\
&+ K_2 K_1 \cdot \langle B^{(2)}, B^{(1)}\rangle + K_2 K_1 \cdot \langle B^{(2)}, B^{(1)}\rangle \\
&= \int_0^t K_1^2 ds + \int_0^t K_2^2 ds \\
&= t
\end{aligned}$$

où on a utilisé que le crochet de martingale est bilinéaire à la première égalité. La formule avec l'intégrale stochastique à la deuxième. Puis que

$\langle B^{(1)}, B^{(1)}\rangle_s = \langle B^{(2)}, B^{(2)}\rangle_s = t$ et $\langle B^{(2)}, B^{(1)}\rangle_s = 0$ car $B^{(1)}, B^{(2)}$ sont des mouvements browniens indépendent. La dernière égalité vient de la remarque $K_1^2 + K_2^2 = 1$. On a donc bien que $\langle M, M\rangle_t = t$ et donc que M_t est un mouvement brownien par le théorème de Levy.

6. On peut montrer que $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ est harmonique. En effet

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2}{x^2+y^2}) = 0$$

(ou en utilisant le laplacien en coordonné polaire, $f(r,\theta) = \log(r)$ soit $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r \times \frac{1}{r}] = 0$.) Alors par la formule d'Ito, $f(\boldsymbol{B}_t)$ est une martingale (voir Devoir précédent).

7. On a

$$\log(x) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{B}_0)) = \mathbb{E}(\log(\|B_{t\wedge T_r \wedge T_R}\|)) \to \mathbb{E}(1_{T_r<T_R}\log(\|B_{T_r}\|) + 1_{T_r>T_R}\log(\|B_{T_R}\|))$$

où on a utiliser le théorème de convergence dominé et que $T_R < \infty$ p.s pour la même raison que précédemment. Donc

$$\log(x) = \log r \times \mathbb{P}(T_r \leq T_R) + \log R \times (1 - \mathbb{P}(T_r \leq T_R))$$

et alors

$$\mathbb{P}(T_r \leq T_R) = \frac{\log(R) - \log x}{\log R - \log r}.$$

8. On peut faire le même raisonnement avec $f(r) = \frac{1}{r^{d-2}}$ qui est la fonction fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d/\{0\}$). On obtient alors

$$\mathbb{P}(T_r \leq T_R) = \frac{R^{2-d} - x^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}}.$$

Puis en faisant tendre $R \to \infty$ on obtient $\mathbb{P}(T_r < \infty) = \frac{x^{2-d}}{r^{2-d}}$.