Devoir du cours martingale et mouvement brownien

12 juin 2020

Durée : 3h, les notes de cours ne sont pas autorisés.

1 Martingale discrète

Question de cours : Montrer que le maximum de plusieurs temps d'arret est un temps d'arret.

Problème 1. On considère un jeu avec N joueurs. Chaque joueurs i dispose de $X_0^{(i)}$ pièces au début de la partie. À chaque tour n, deux joueurs misent chacun une pièce et la joue à « pile ou face ». Le gagnant garde les deux pièces. On peut noter les résultats des lancés « pile où face » $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ qui sont des variables iid avec $\mathbb{P}(P_1 = 1) = \mathbb{P}(P_2 = -1) = \frac{1}{2}$. On note la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(P_1, \cdots, P_n)$. Le couple de joueur $(i_n, , j_n) \in [1, N]^2$ est un processus prévisible de tel sorte que $X_n^{(i_n)} > 0$ et $X_n^{(j_n)} > 0$, c'est à dire chacun des deux joueurs a au moins une pièce. La partie se termine lorsque tous les joueurs sont ruinés sauf un. Le dernier joueur ayant encore de l'argent gagne la partie.

1. Montrer que pour tout i, $X^{(i)}$ est une martingale.
2. Montrer que le jeu se termine p.s. Quelle est la situation finale ?
3. Quelle est la probabilité que le joueur i remporte la partie ?
4. Proposer un processus prévisible $A_n^{(i)}$ telle que $(X^{(i)})_n^2 - A_n^{(i)}$ soit une martingale.
5. En moyenne à combien de lancés de pile-ou-face le joueur i participera t-il ?
6. Combien de temps dure la partie en moyenne ? Pour 10 joueurs et $\sum_{i=1}^{10} X_0^{(i)} = 110$, préciser pour quelle configuration initiale la partie dure en moyenne le plus longtemps.
7. Un tricheur s'invite dans la partie, il commence avec seulement une pièce mais lorsqu'il joue à pile ou face, sa probabilité de gain et $\frac{2}{3}$ et non plus $\frac{1}{2}$. Avec quelle probabilité gagnera t il la partie ?

2 Martingale continue

Question de cours : Enoncer et démontrer la formule d'intégration par partie dans le cas de martingales continues.

Problème 2. Soit M_t une martingale continue bornée dans L^2. On note $\langle M, M\rangle_t$ sa variation quadratique et on supposera que $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_1) = 1$. On pose

$$S_n^{(N)} := \sum_{k=1}^{n} M_{\frac{k}{N}}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}}).$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_N^{(N)})$. Le processus $(S_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ est-il une martingale ?
2. Montrer que pour $N \to \infty$, $S_N^{(N)}$ converge en proba et on précisera la limite.
3. Montrer que pour $N \to \infty$, $\sum_{k=1}^{N}(M_{\frac{k}{N}} - M_{\frac{k-1}{N}})^3 \to 0$.
4. Résoudre l'équation stochastique
$$N_t = 1 + \int_0^t N_s dB_s$$
où B_t est un mouvement brownien.

Problème 3. On considère $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ issu de $(0,0)$, c'est à dire que $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}$ sont deux mouvement brownien indépendant.

1. Calculer $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_t\|^2)$ et montrer que $\|\boldsymbol{B}_t\|^2 - \mathbb{E}(\|\boldsymbol{B}_t\|^2)$ est une martingale.
2. Soit $R > 0$ et $T = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t\| = R\}$. Calculer $\mathbb{E}(T)$.
3. Soit $x > 0$, Dans cette question et pour la suite $\boldsymbol{B}_t$ est le mouvement brownien issu de $(x, 0)$. En supposant que p.s $B_t \neq 0$ pour tout $t > 0$. Avec la formule d'ito exprimer $\|B_t\| = M_t + A_t$ où M_t est une martingale et A_t un processus à variation fini.
4. Montrer que $\|B_t\|$ est une sousmartingale.
5. Montrer que M_t est un mouvement brownien.
6. Montrer que $\ln(\|B_t\|)$ est une martingale. (On pourra utiliser le laplacien en coordonné polaire $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial}{\partial r}f] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$.)
7. Pour $0 < r < x < R$ $T_r = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t\| = r\}$, $T_R = \inf\{t : \|\boldsymbol{B}_t\| = R\}$, Donner $\mathbb{P}(T_r \leq T_R)$.
8. Pour $\boldsymbol{B}_t$ un mouvement brownien en dimension $d \geq 3$ issu de $(x, 0, \cdots, 0)$. Calculer $\mathbb{P}(T_r < \infty)$. (On pourra proposer une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d/\{0\}$).