Devoir Martingales Continues et Formule d'Ito

8 juin 2020

Ce devoir est à rendre par mail avant le 30 mai au soir. Comme pour le devoir précédemment il comptera pour 1 point de bonus à l'examen.

1 Enoncé

Exercice 1. On considera ici des mouvements browniens.

1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.
   (a) Soit H une fonction déterministe, constante par morceau. On pourra écrire
   $$H = \sum_{i=1}^{n} h_i 1_{[t_{i-1},t_i]}.$$
   Montrer que pour tout $t \geq 0$ $(H \cdot B)_t$ est une gaussienne, dont on donnera la moyenne et la variance.
   (b) Calculer $\langle (H \cdot B), (H \cdot B) \rangle_t$.
   (c) Pour cette question on ne suppose plus H constante par morceau. Montrer que si $\int_0^\infty H_s^2 ds < \infty$ alors $(H \cdot B)_t$ converge p.s et dans L^2 lorsque $t \to \infty$.
2. Soit $B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(d)}$ des mouvement brownien indépendants. On note $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(d)})$
   (a) Calculer $\langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$.
   (b) Soit A une matrice dans $\mathbb{R}^{d\times d}$. On note le produit scalaire $X_t = (\boldsymbol{B}_t, A\boldsymbol{B}_t^T) = \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_t^{(i)} B_t^{(j)}$. Donner U_t un processus à variation finie tel que $X_t - U_t$ soit une martingale. En déduire une condition sur A tel que X_t soit une martingale.
   (c) Avec la formule d'Ito montrer que $\sin(B_t^{(1)})e^{B_t^{(2)}}$ est une martingale.
   (d) À l'aide de la formule d'Ito démontrer la proposition suivante « Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} f = 0$, alors $f(\boldsymbol{B}_t)$ est une martingale ».

Exercice 2. On considera ici des martingales continues quelconques. Sauf pour la dernière question les processus en questions sont adaptés pour une même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

1. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$, une martingale continue bornée dans L^2 et $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus à variation fini, $A_0 = 0$. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue bornée dans L^2.
   (a) On suppose que $X_t = M_t + A_t$. Montrer que cette décomposition est unique.
   (b) On suppose que p.s, $t \to A_t$ est croissant. Montrer que X_t est une sousmartingale.
   (c) À l'aide de la formule d'Ito proposer une nouvelle preuve de la propriété de Jensen : « Soit $f \in \mathcal{C}^2$ convexe, et $(N_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue alors $f(N_t)$ est une sousmartingale » (on admettra les conditions d'intégrabilités).
2. On suppose maintenant que $M_0 = x$ et $\langle M, M\rangle_t = \sqrt{t}$ pout tout t.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(M_t^2)$.
   (b) On pose $T_0 = \inf\{M_t = 0\}$ et $T_a = \inf\{M_t = a\}$ avec $0 < x < a$. A l'aide d'une martingale bien choisie calculer $\mathbb{E}(\sqrt{T_0 \wedge T_a})$
   (c) Pour quel $\sigma\in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $Y_t = \exp(\sigma M + f(t))$ est une martingale ?
   (d) Soit $0 < t_1 < t_2$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1}+\beta(M_{t_2}-M_{t_1})})$. En déduire que M_{t_1} et $(M_{t_2} - M_{t_1})$ sont indépendants.
   (e) On pose $W_t := M_{t^2}$, Montrer que W_t est un mouvement brownien issu de x.

2 Correction

Solution 1.

1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.

   (a) Les h_i sont déterministes et donc trivialement $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ mesurables. On calcule alors

$$\begin{aligned}
(H\cdot B)_t &= \int_0^t \sum_{i=1}^n h_i 1_{[t_{i-1},t_i)}(s)dB_s \\
&= \sum_{i=1}^n h_i \int_{t_{i-1}\wedge t}^{t_i\wedge t} dB_s \\
&= \sum_{i=1}^n h_i (B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}) \\
&= \begin{cases} \sum_{i=1}^k h_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + h_{k+1}(B_t - B_{t_k}) & \text{si } t_k \leq t < t_{k+1} \\ \sum_{i=1}^n h_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) & \text{si } t \geq t_n \end{cases}.
\end{aligned}$$

   Ceci aurait pu aussi être directement obtenu avec la défnition de $(H\cdot B)$ pour les fonctions constantes par morceaux. Puisque B est un mouvement brownien, les incréments $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i\leq k}$ et $(B_t - B_{t_k})$ sont des variables gaussienne indépendantes centrées et de variance $(t_i - t_{i-1})_{i\leq k}$ et $(t - t_k)$ respectivement. $(H\cdot B)_t$ est donc une gaussienne comme *combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes*. Avec

$$\mathbb{E}((H\cdot B)_t) = \sum_{i=1}^k h_i \mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})) + h_{k+1}\mathbb{E}((B_t - B_{t_k})) = 0.$$

   si $t_k \leq t < t_{k+1}$ et de même $\mathbb{E}((H\cdot B)_t) = 0$ pour $t \geq t_n$. On utilise que la variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((H\cdot B)_t^2) &= \sum_{i=1}^k h_i^2 \mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) + h_{k+1}^2 \mathbb{E}((B_t - B_{t_k})^2) \\
&= \sum_{i=1}^k h_i^2 (t_i - t_{i-1}) + h_{k+1}^2 (t - t_k)
\end{aligned}$$

   si $t_k \leq t < t_{k+1}$ et de même $\mathbb{E}((H\cdot B)_t^2) = \sum_{i=1}^n h_i^2(t_i - t_{i-1})$ pour $t \geq t_n$.

(b) Calculons

$$
\begin{aligned}
\langle (H\cdot B),(H\cdot B)\rangle_t &= H^2\cdot\langle B,B\rangle_t\\
&= \int_0^t H_s^2 d\langle B,B\rangle_s\\
&= \int_0^t \sum_{i=1}^n h_i^2 1_{[t_{i-1},t_i)}(s)ds\\
&= \begin{cases} \sum_{i=1}^k h_i^2(t_i-t_{i-1}) + h_{k+1}^2(t-t_k) & \text{si } t_k\le t<t_{k+1}\\ \sum_{i=1}^n h_i^2(t_i-t_{i-1}) & \text{si } t\ge t_n\end{cases}
\end{aligned}
$$

On remarque que ici la variation quadratique est déterministe et correspond alors à $\mathbb{E}((H\cdot B)_t^2)$.

(c) Par définition de l'intégrale stochastique $((H\cdot B)_t)_{t\ge 0}$ est une martingale continue. Puisque $(H\cdot B)_0 = 0$ et que $(H\cdot B)_t^2 - \langle (H\cdot B),(H\cdot B)\rangle_t$ est une martingale on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((H\cdot B)_t^2) &= \mathbb{E}(\langle (H\cdot B),(H\cdot B)\rangle_t)\\
&= \mathbb{E}(H^2\cdot\langle B,B\rangle_t)\\
&= \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 d\langle B,B\rangle_s)\\
&= \int_0^t H_s^2 ds\\
&\le \int_0^\infty H_s^2 ds < \infty
\end{aligned}
$$

En particulier $(H\cdot B)$ est uniformément bornée dans L^2. Elle converge donc p.s et dans L^2 pour $t\to\infty$.

2. Soit $B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(d)}$ des mouvement brownien indépendants. On note $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(d)})$

(a) Pour tout i, $B^{(i)}$ est un mouvement brownien et donc $\langle B^{(i)},B^{(i)}\rangle_t = t$. Montrons maintenant que $B_t^{(i)}B_t^{(j)}$ est une martingale pour $i\ne j$. Soit $0\le s\le t$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t^{(i)}B_t^{(j)}|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t^{(i)}-B_s^{(i)})(B_t^{(j)}-B_s^{(j)})|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s^{(i)}(B_t^{(j)}-B_s^{(j)})|\mathcal{F}_s)\\
&\quad + \mathbb{E}((B_t^{(i)}-B_s^{(i)})B_s^{(j)}|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s^{(i)}B_s^{(j)})|\mathcal{F}_s)\\
&= \mathbb{E}((B_t^{(i)}-B_s^{(i)})(B_t^{(j)}-B_s^{(j)})) + B_s^{(i)}\mathbb{E}((B_t^{(j)}-B_s^{(j)})|\mathcal{F}_s)\\
&\quad + B_s^{(j)}\mathbb{E}((B_t^{(i)}-B_s^{(i)})|\mathcal{F}_s) + B_s^{(i)}B_s^{(j)}\\
&= \mathbb{E}((B_t^{(i)}-B_s^{(i)})\mathbb{E}(B_t^{(j)}-B_s^{(j)}) + B_s^{(i)}B_s^{(j)}\\
&= B_s^{(i)}B_s^{(j)}
\end{aligned}
$$

Où on a utilisé que les incréments de $(B_t^{(i)} - B_s^{(i)}), (B_t^{(j)} - B_s^{(j)})$ sont indépendants de $\mathcal{F}_s$. Par définition du crochet de martingale on a alors $\langle B_t^{(i)}, B_t^{(j)} \rangle = 0$. Finallement

$$\langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(b) En utilisant la question précédente

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} (B_t^{(i)} B_t^{(j)} - t 1_{i=j})$$

est une martingale comme combinaison linéaire de martingales. En particulier avec $U_t := \sum_{i=1}^d A_{ii} t$ on a que $X_t - U_t$ est une martingale. U est à variation fini comme combinaison linéaire de fonction à variation fini. On sait également cette décomposition martingale + variation fini de X est unique. En particuier X est une martingale ssi $U = 0$ c'est à dire $\sum_{i=1}^d A_{ii} = \mathrm{Tr}(A) = 0$.

(c) Soit $f(x,y) = \sin(x) e^y$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\cos(x) e^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(x) e^y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x) e^y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \sin(x) e^y$. Nous n'avons pas besoin de calculer les termes croisés $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ car par la question précédente on a $\langle B^{(1)}, B^{(2)} \rangle_t = 0$ et donc ce terme n'apparait pas dans la formule d'Ito. Avec la formule d'Ito on a

$$\begin{aligned} f(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}) &= 0 - \int_0^t \cos(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} dB_s^{(1)} + \int_0^t \sin(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} dB_s^{(2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} ds \\ &= - \int_0^t \cos(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} dB_s^{(1)} + \int_0^t \sin(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} dB_s^{(2)}. \end{aligned}$$

Puisque $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ sont des martingales, par définitions de l'intégrale stochastique, $\int_0^t \cos(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} dB_s^{(1)}$ et $\int_0^t \sin(B_s^{(1)}) e^{B_s^{(2)}} dB_s^{(2)}$ sont des martingales. $f(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ est donc une martingale comme somme de martingales.

(d) On a

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{B}_t) = f(\boldsymbol{0}) &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{B}_s) dB_s^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{B}_s) d\langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_s \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{B}_s) ds \\ &= f(\boldsymbol{0}) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{B}_s) dB_s^{(i)} \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_s = 0$ pour $i \neq j$ et $\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ pour la dernière égalité. Pour tout i, $B^{(i)}$ est une martingale et par définitions de l'intégrale stochastique $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{B}_s)dB_s^{(i)}$ est une martingale et on peut alors conclure.

Solution 2. On considera ici des martingales continues quelconques. Sauf pour la dernière question les processus en questions sont adaptés pour une même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

1. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$, une martingale continue bornée dans L^2 et $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus à variation fini, $A_0 = 0$. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue bornée dans L^2.
   (a) Soit $\tilde{M}_t$ une martingale borné continue, $\tilde{A}_t$ un processus à variation fini tel que $\tilde{A}_0 = 0$ et $X_t = \tilde{M}_t + \tilde{A}_t = M_t + A_t$. Alors on a
   $$M_t - \tilde{M}_t = \tilde{A}_t - A_t.$$
   Ce terme est à la fois une martingale continue borné dans L^2 comme somme de martingales continues bornées dans L^2 et un processus à variation fini comme somme de processus à variation fini et issu de 0. On en déduit que $M_t - \tilde{M}_t$ est constante et égale à 0 car $\tilde{A}_0 - A_0 = 0$. Conclusion $M_t = \tilde{M}_t$ et $A_t = \tilde{A}_t$, la décomposition est bien unique.
   (b) Soit $0 \leq s \leq t$. Alors
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(A_t|\mathcal{F}_s)\\ &= M_s + A_s + \mathbb{E}((A_t - A_s)|\mathcal{F}_s)\\ &\geq M_s + A_s = X_s\end{aligned}$$
   où on a utilisé que $(A_t - A_s) \geq 0$ et donc que $\mathbb{E}((A_t - A_s)|\mathcal{F}_s) \geq 0$. X_t est donc bien une sousmartingale.
   (c) À l'aide de la formule d'Ito on a
   $$f(N_t) = f(N_0) + \int_0^t f'(N_s)dN_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(N_s)d\langle N, N\rangle_s.$$
   Puisque N est une martingale, par définition de l'intégrale stochastique $\int_0^t f'(N_s)dN_s$ est une martingale. De plus puisque $\langle N, N\rangle_s$ est à variation fini (avec les condition d'intégrabilité) on a que $\frac{1}{2}\int_0^t f''(N_s)d\langle N, N\rangle_s$ est une fonction à variation fini. Puisque $\langle N, N\rangle$ est croissante et $f''(N_s) \geq 0$, $\int_0^t f''(N_s)d\langle N, N\rangle_s$ est croissante. (C'est un résultat générale et que l'on peut réutiliser par la suite : « si a est à variation fini croissante et $f \geq 0$, alors $t \to \int_0^t f(s)da(s)$ est croissante. ») En effet pour $t_1 \leq t_2$on a que
   $$\int_{t_1}^{t_2} f''(N_s)d\langle N, N\rangle_s = \lim_{\substack{(t_1=s_0<\cdots<s_n=t_2),\\ \max|s_{i+1}-s_i|\to 0}} \sum f''(s_i)(\langle N, N\rangle_{s_{i+1}} - \langle N, N\rangle_{s_i}) \geq 0$$
   car chacun des termes de la somme est positif. D'après la question précédente, $f(N)$ est une sousmartingale.

2. On suppose maintenant que $M_0 = x$ et $\langle M, M\rangle_t = \sqrt{t}$ pout tout t.

   (a) Puisque $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale, on a

   $$\mathbb{E}(M_t^2) - \sqrt{t} = \mathbb{E}(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t) = \mathbb{E}(M_0^2 - \langle M, M\rangle_0) = x^2$$

   soit $\mathbb{E}(M_t^2) = x^2 + \sqrt{t}$.

   (b) On pose $T_0 = \inf\{M_t = 0\}$ et $T_a = \inf\{M_t = a\}$ avec $0 < x < a$ et $T = T_0 \wedge T_a$. Puisque $M_{t\wedge T}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge T}$ est une martingale

   $$x^2 = \mathbb{E}(M_0^2 - \langle M, M\rangle_0) = \mathbb{E}(M_{t\wedge T}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge T}) = \mathbb{E}(M_{t\wedge T}^2) - \mathbb{E}(\sqrt{t\wedge T})$$

   On a pour tout t, $0 \leq M_{t\wedge T}^2 \leq a^2$. En particulier $\mathbb{E}(\sqrt{t\wedge T}) \leq a^2 - x^2$. Par convergence monotone $\mathbb{E}(\sqrt{t\wedge T}) \to \mathbb{E}(\sqrt{T}) \leq a^2 - x^2$. On en déduit donc que $T < \infty$ p.s. En utilisant encore que $0 \leq M_{t\wedge T}^2 \leq a^2$, par convergence dominé on a

   $$\mathbb{E}(M_{t\wedge T}^2) \to \mathbb{E}(M_T^2) = \mathbb{E}(M_T^2 1_{T=T_a} + M_T^2 1_{T=T_0}) = \mathbb{P}(T = T_a)a^2$$

   De même, puisque M_t est une martingale on a

   $$x = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{t\wedge T}) \to \mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_T 1_{T=T_a} + M_T 1_{T=T_0}) = \mathbb{P}(T = T_a)a$$

   On a utilisé une fois encore la convergence dominé ($0 \leq M_{t\wedge T} \leq a$). Conclusion $\mathbb{P}(T = T_a) = \frac{x}{a}$ et

   $$\mathbb{E}(\sqrt{T}) = \mathbb{E}(M_T^2) - x^2 = ax - x^2.$$

   (c) Par la proposition du cours on a directement que $f(t) = -\frac{1}{2}\langle \sigma M, \sigma M\rangle_t = -\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{t}$ était solution. C'était facultatif mais on peut montrer en plus qu'à une constante près c'est la seule. En utilisant la formule d'Ito avec$\langle \sigma M + f(t), \sigma M + f(t)\rangle_t = \langle \sigma M, \sigma M\rangle_t = \sigma^2\sqrt{t}$ on a

   $$Y_t = Y_0 + \sigma\int_0^t Y_s dM_s + \int_0^t f'(s)Y_s ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t Y_s \frac{ds}{2\sqrt{s}}.$$

   Le terme $\sigma\int_0^t Y_s dM_s$ est une martingale. Pour que Y_t soit une martingale il faut que le terme de variation fini s'annule, c'est à dire

   $$\int_0^t (f'(s) + \frac{\sigma^2}{4\sqrt{s}})Y_s ds = 0$$

   pour tout t. On en déduit que $(f'(s) + \frac{\sigma^2}{4\sqrt{s}}) = 0$ pour tout s car $Y_s > 0$. Conclusion

   $$f(t) = f(0) - \int_0^t \frac{\sigma^2}{4\sqrt{s}} ds = f(0) - \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{t}$$

(d) Soit $0 < t_1 < t_2$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avec la question précédente on sait que $e^{\alpha M_{t_1} - \frac{\alpha^2}{2}\sqrt{t_1}}$ et $e^{\beta M_{t_2} - \frac{\beta^2}{2}\sqrt{t_2}}$ sont des martingale. On a alors

$$\mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1}}) = \mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1} - \frac{\alpha^2}{2}\sqrt{t_1}})e^{\frac{\alpha^2}{2}\sqrt{t_1}} = \mathbb{E}(e^{\alpha M_0 - \frac{\alpha^2}{2}\sqrt{0}})e^{\frac{\alpha^2}{2}\sqrt{t_1}} = e^{\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}\sqrt{t_1}}$$

De même

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\beta(M_{t_2}-M_{t_1})}|\mathcal{F}_{t_1}) &= e^{-\beta M_{t_1}}\mathbb{E}(e^{\beta M_{t_2} - \frac{\beta^2}{2}\sqrt{t_2}}|\mathcal{F}_{t_1})e^{\frac{\beta^2}{2}\sqrt{t_2}} \\ &= e^{\beta M_{t_1} - \frac{\beta^2}{2}\sqrt{t_1}}e^{-\beta M_{t_1}}e^{\frac{\beta^2}{2}\sqrt{t_2}} \\ &= e^{\frac{\beta^2}{2}(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})}\end{aligned}$$

En particulier $\mathbb{E}(e^{\beta(M_{t_2}-M_{t_1})}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\beta(M_{t_2}-M_{t_1})}|\mathcal{F}_{t_1})) = e^{\frac{\beta^2}{2}(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})}$. Enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1} + \beta(M_{t_2}-M_{t_1})}) &= \mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1}}\mathbb{E}(e^{\beta(M_{t_2}-M_{t_1})}|\mathcal{F}_{t_1})) \\ &= e^{\frac{\beta^2}{2}(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})}\mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1}}) \\ &= e^{\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}\sqrt{t_1} + \frac{\beta^2}{2}(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})}\end{aligned}$$

On remarque que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1}}e^{\beta(M_{t_2}-M_{t_1})}) = \mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1}})\mathbb{E}(e^{\beta(M_{t_2}-M_{t_1})})$$

M_{t_1} et $(M_{t_2} - M_{t_1})$ sont donc indépendants.

(e) Puisque $\langle M, M\rangle_t \to \infty$, il existe un mouvement brownien B tel que $B_{\langle M,M\rangle_t} = M_t$ soit $B_{\sqrt{t}} = M_t$. En particulier $W_t := M_{t^2} = B_t$ est un mouvement brownien. On pouvait également le faire dans l'autre sens : on calcule

$$\begin{aligned}\langle W, W\rangle_t &= \lim_{\substack{(0=s_0<\cdots<s_n=t) \\ \max|s_{i+1}-s_i|\to 0,}} \sum_{i=1}^{n}(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})^2 \\ &= \lim_{\substack{(0=s_0<\cdots<s_n=t) \\ \max|s_{i+1}-s_i|\to 0,}} \sum_{i=1}^{n}(M_{s_i^2} - M_{s_{i-1}^2})^2 \\ &= \lim_{\substack{(0=s'_0<\cdots<s'_n=t^2) \\ \max|s'_{i+1}-s'_i|\to 0,}} \sum_{i=1}^{n}(M_{s'_i} - M_{s'_{i-1}})^2 \\ &= \langle M, M\rangle_{t^2} = t\end{aligned}$$

Donc W est un mouvement brownien issu de x par le théorème de Levy.