Martingale et mouvement brownien

9 juin 2020

Version très préliminaire. N'hésitez à me signaler les passages qui ne vous paraissent pas clairs.

Table des matières

Première partie

Martingales discrètes

1 Rappels sur l'espérance conditionnel

1.1 Introduction sur un exemple.

Soit $0 < t_1 < t_2 < t_{n-1} < 1$ et on considère f une fonction constante par morceaux sur les segments $[t_i, t_{i+1})$ (où on notera $t_0 = 0$ et $t_n = 1$). Soit $\{s_1, \cdots, s_{l-1}\} \subset \{t_1, \cdots, t_{n-1}\}$, on souhaiterai approximer f par une fonction g constante par morceaux sur les segments $[s_i, s_{i+1})$. On peut penser à un signal où f est un sequençage à haute précision et que l'on veut se restreindre à un signal plus grossier mais conservant à peu près les caractéristiques de f. On a plusieur approche possible :

La première possibilité est de directement prendre la moyenne de f sur chacun des segments $[s_i, s_{i+1})$

$$g = \sum b_i 1_{[s_i, s_{i+1})}$$

où $b_i = \frac{1}{|s_{i+1} - s_i|} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u)du$.

Une deuxième approache plus formelle est de minimiser $\|f - g\|$ pour une certaine norme. La plus facile est de considérer la norme $\|.\|_{L^2}$:

$$\|f - g\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(u) - g(u)|^2 du$$

car c'est un espace de Hilbert. il se trouve que pour ce choix ci la solution obtenue est la même que précédemment. En effet on on peut vérifier en écrivant aussi $g = \sum b_i 1_{[s_i, s_{i+1})}$, le minimum est atteind lorsque

$$0 = \frac{d}{db_i} \|f - g\|_{L^2}^2 = 2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u) - b_i du$$

et donc $(s_{i+1} - s_i) b_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u)du$.

Une troisième approache est d'aspect un peu pratique. Plutôt que voir f comme une fonction on peut la voir plutôt comme une forme linéaire (une distribution) sur un ensemble des fonction

$$\langle f, h \rangle = \int_0^1 f(u)h(u)du$$

On peut penser que si f est un signal, les $\langle f, h \rangle$ sont les informations que l'on souhaite extraire du signal. Si les h considérés sont tous grossiers : constante par morceaux sur les segments $[s_i, s_{i+1})$, il est inutile de conserver tout le sequençage de haute précision. On introduira plutôt g également constante par morceau $[s_i, s_{i+1})$ qui agit de la même manière que f :

$$\langle g, h \rangle = \langle f, h \rangle$$

pour tout h. Cette troisième définition de g donne encore la même fonction que précédemment. En effet on peut vérifier pour $h = 1_{[s_i,s_{i+1})}$

$$\langle g, h\rangle = \int_{s_i}^{s_{i+1}} b_i du = \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u)du = \langle f, h\rangle$$

Cet exemple illustre les différentes points de vu de considérer l'espérance conditionnelle que nous voyons maintenant.

1.2 Espérance conditionnel

1.2.1 Quelques rappel sur les espaces mesurables.

Soit Ω un ensemble. $\mathcal{F}$ est une tribue sur Ω si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathcal{F}$ stable par unions, intersections dénombrable et complémentaire (σ-algèbre).

Exemple 1.1. Si $\mathcal{B}$ est une tribu fini de Ω alors il existe une partition $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ des "atomes" de la tribu tel que pour tout $B \in \mathcal{B}$, il existe $I \subset \{1, \ldots, k\}$

$$B = \cup_{i\in I} A_i.$$

Définition 1.2. Soit deux tribu $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur Ω, on dit que$\mathcal{F}$ est plus fine que $\mathcal{G}$ et reciproquement que $\mathcal{G}$ est plus grossière que $\mathcal{F}$ ssi $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. On dit aussi que $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.3. Soit $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurable. Une fonction $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est dite mesurable si pour tout $A \in \mathcal{F}_2$ on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$. Remarque si $\mathcal{F}_1'$ est plus fine que $\mathcal{F}_1$, respectivement $\mathcal{F}_2'$ plus grossière que $\mathcal{F}_2$ alors f est également mesurable pour $(\Omega_1, \mathcal{F}_1'), (\Omega_2, \mathcal{F}_2')$.

On supposera toujours que $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne. Dans ce cas $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable ssi $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.4. Pour $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ un espaces mesurable, une fonction $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ génère une tribu sur Ω_1 via $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_2\}$.

Remarque 1.5. L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$ mesurable est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ alors les fonctions $\mathcal{G}$ mesurables forment un sous espace vectoriel.

Proposition 1.6. *L'ensemble de fonctions $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}(XY)$.*

1.2.2 Définitions de l'espérance conditionnel.

Définition 1.7. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ une sous tribu

1. Si $\mathcal{B}$ est une tribu fini, on pose

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) := \sum_{A \text{ atomes de } \Omega} 1_A.b_A, \quad b_A := \begin{cases} \frac{1}{\mu(A)}\mathbb{E}(1_A X) & \text{si } \mu(A) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on pose

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) := \pi_{L^2(\Omega,\mathcal{B},\mu)}(X)$$

où $\pi_{L^2(\Omega,\mathcal{B},\mu)}$ est la projection orthogonal (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$) sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.
3. On définit $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ comme l'unique fonction de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ tel que

$$\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

pour toute fonction Z $\mathcal{G}$-mesurable bornée. Ou de manière equivalente comme l'unique fonction de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ tel que
4.
$$\mathbb{E}(1_A X) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

pour tout $A \in \mathcal{G}$.

La première définition est très intuitive : une espérance conditionnelle consiste simplement à moyenner la fonction sur des petits sous espaces. On peut conjecturer que les propriétés que l'on connait sur la moyenne se généralisent à l'espérance conditionnelle.

La deuxième définition donne un autre point de vu aussi très intéressant : l'espérance conditionnelle est une application linéaire, mieux une projection ! Ceci nous permet aussi de deviner certaine de ces propriétés.

La troisième définition est plus formelle et moins transparante. Cependant c'est la plus générale et c'est donc elle que l'on doit utiliser pour les démonstrations.

Montrons que ces trois définitions sont bien équivalentes (sur leur domaine de définition).

Démonstration. 1⇔2 : Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{B}$ une tribu fini. La variable $\pi_{L^2(\Omega,\mathcal{B},\mu)}(X) =: \pi(X)$ est la fonction $\mathcal{B}$ mesurable qui minimise $\|X - Y\|_{L^2}^2$ sur toutes les fonctions $\mathcal{B}$ mesurable $Y = \sum_{A \text{ atome de } \Omega} 1_A b_A$. On a donc $\pi(X) =$ et En dérivant

$$\frac{d}{db_A}\|X - Y\|_{L^2}^2 = \frac{d}{db_A} \sum_{A' \text{ atome de } \Omega} \int_{A'} (X - b_{A'})^2 d\mu = 2 \int_A (X - b) d\mu = 0$$

et donc $b_A \mu(A) = \int_A X d\mu = \mathbb{E}(1_A X)$.

3⇔2 Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on a $X = \pi(X) + (X - \pi(X))$ où par définition de la projection orthogonal $(X - \pi(X)) \perp L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Soit Z $\mathcal{B}$ mesurable borné. Alors $\mathbb{E}((X - \pi(X))Z) = 0$ et on a

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\pi(X)Z) + \mathbb{E}((X - \pi(X))Z) = \mathbb{E}(\pi(X)Z)$$

ce qui redonne bien la définition 2. Le sens 3⇒2 se déduit alors de l'unicité. □

Exercice 1.8. En utilisant les trois définitions, montrer que pour $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ la tribu grossière pour tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ on a

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)1_\Omega$$

(la fonction constante égale $\mathbb{E}(X)$).

Solution 1.9. C'est immédiat en utilisant la première définition : $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mathbb{E}(X1_\Omega)1_\Omega = \mathbb{E}(X)1_\Omega$ puisque $\mu(\Omega) = 1$. Pour la deuxième puisque $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$ mesurable, $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = b1_\Omega$. On cherche b qui minimise $\mathbb{E}((X - b1_\Omega)^2)$. Il suffit de dériver : $\frac{d}{db}\mathbb{E}((X - b1_\Omega)^2) = 2\mathbb{E}(X - b1_\Omega) = 0$ soit $\mathbb{E}(X) = b\mathbb{E}(1_\Omega) = b$. Enfin pour la troisième définition. On a encore $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = b1_\Omega$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1_\Omega X) = \mathbb{E}(1_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(b1_\Omega) = b$ car $\Omega \in \mathcal{B}$.

On montre maintenant que la troisième définition est valide : que l'on a bien existence et unicité.

Démonstration. Unicité : Soit Y_1 et Y_2 deux fonction $\mathcal{B}$ mesurable qui satisfont la définition 3. On pose $A_+ := \{Y_1 > Y_2\}$ et $A_- := \{Y_2 > Y_1\}$, puisque Y_1 et Y_2 sont $\mathcal{B}$ mesurable, $A_+, A_- \in \mathcal{B}$. Alors

$$\mathbb{E}(1_{A_+}(Y_1 - Y_2)) = \mathbb{E}(1_{A_+}Y_1) - \mathbb{E}(1_{A_+}Y_2)) = \mathbb{E}(1_{A_+}X)) - \mathbb{E}(1_{A_+}X)) = 0.$$

Mais de plus par construction $1_{A_+}(Y_1 - Y_2) \geq 0$. Conclusion $1_{A_+}(Y_1 - Y_2) = 0$ p.s et donc $1_{A_+} = 0$ p.s. On réalise le même raisonnement pour A_- et on obtient $1_{A_-} = 0$ p.s. Pour $\{Y_1 \neq Y_2\} = A_+ \cup A_-$ est bien de mesure nulle. □

Pour l'existence on va d'abord montrer la proposition suivante

Proposition 1.10. *Soit $X, X' \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Si $X \leq X'$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ p.s.*

Ceci semble évident lorsque l'on pense à la définition utilisant la moyenne avec $\mathcal{B}$ fini. Donc montrons la dans le cas général.

Démonstration. On pose $A_+ = \{\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) > \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})\}$. Puisque $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}), \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$ mesurable, $A_+ \in \mathcal{B}$. Donc

$$0 \leq \mathbb{E}((X' - X)1_{A_+}) = \mathbb{E}((\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+})$$

mais puisque $(\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+} \leq 0$, on a alors $(\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+} = 0$ p.s soit $1_{A_+} = 0$ p.s. et donc $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ p.s. □

On montre maintenant l'existence pour la définition 3.

Démonstration. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ positif, considérons la suite de variables aléatoires $X \wedge n$. On a alors $X \wedge n \to X$ monotone croissant et $X \wedge n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pour tout n. $\pi(X \wedge n)$ est donc bien définit et par la proposition 1.10, $\pi(X \wedge n)$ est monontone croissant. Il exisite donc Y_∞ tel que $\pi(X \wedge n) \to Y_\infty$.

Tout d'abord pour tout n, $\pi(X \wedge n)$ est $\mathcal{B}$ mesurable donc Y_∞ est $\mathcal{B}$ mesurable comme limite de fonction $\mathcal{B}$ mesurable. Soit $A \in \mathcal{B}$. Alors pour tout n

$$\mathbb{E}(1_A(X \wedge n)) = \mathbb{E}(1_A \pi(X \wedge n))$$

par convergence monotone on a $\mathbb{E}(1_A(X \wedge n)) \to \mathbb{E}(1_A X)$ et $\mathbb{E}(1_A \pi(X \wedge n)) \to \mathbb{E}(1_A Y_\infty)$. Conclusion pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}(1_A Y_\infty) = \mathbb{E}(1_A X)$, et on peut donc poser $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = Y_\infty$. □

1.3 Quelques propriétés de l'espérance conditionnelle.

L'espérance conditionnelle est la notion de base pour les martingales. Ici on présente quelques propriétés qui nous seront très utiles dans la suite.

Proposition 1.11. *Si X est $\mathcal{B}$ mesurable, alors* $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$

1. $X \to \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ *est une application linéaire.*
2. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$
3. *Si* $X \geq 0$, *alors* $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$ *p.s*
4. $|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{B})$ *p.s*

Démonstration. Preuve : Trivialement X est $\mathcal{B}$ mesurable est pour tout Z $\mathcal{B}$ mesurable $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(XZ)$ X satisfait donc bien les conditions de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.

Soit $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{B})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$ est bien $\mathcal{B}$ mesurable car $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$ et $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$ mesurable. De plus pour tout Z $\mathcal{B}$ mesurable on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)Z) &= \lambda\mathbb{E}(X_1 Z) + \mu\mathbb{E}(X_2 Z) \\
&= \lambda\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1|\mathcal{B})Z) + \mu\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})Z) \\
&= \mathbb{E}(Z(\lambda\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})))
\end{aligned}$$

Donc par unicité $\mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)|\mathcal{B}) = \lambda\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$.

Ω est évidemment $\mathcal{B}$ mesurable donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1_\Omega X) = \mathbb{E}(1_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$.

C'est un cas particulier de la proposition 1.10 avec $X' = 0$.

On écrit $X = X_+ - X_-$ où $X_+ = 1_{X \geq 0} X$ et $X_- = -1_{X<0} X$. $|X| = X_+ + X_-$ et $\mathbb{E}(X_+|\mathcal{B})$, $\mathbb{E}(X_-|\mathcal{B})$ sont positif p.s. On a alors

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| = |\mathbb{E}(X_+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X_-|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(X_+|\mathcal{B}) + \mathbb{E}(X_-|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(|X_+||\mathcal{B})$$

□

Proposition 1.12. *Si Y est $\mathcal{B}$ mesurable et $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$$

Démonstration. $Y, \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$ mesurable donc $Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ aussi. Soit Z, $\mathcal{B}$ mesurable, alors

$$\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})YZ)$$

car YZ est $\mathcal{B}$ mesurable. Par unicité on a donc $\mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$. □

Proposition 1.13. *(Concatenation)*
Si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}$ *alors* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$.

Démonstration. $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ est bien $\mathcal{B}_1$ mesurable. Soit Z $\mathcal{B}_1$ mesurable,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)Z) = \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)Z)$$

on peut alors conclure par unicité. □

Proposition 1.14. *:Jensen*
Soit $X \in L^1$ *et soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convex alors*

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{B}) \geq f(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

Démonstration. On utilise le fait qu'une fonction convexe peut s'exprimer comme le maximum de fonction affines. On pose

$$E_f = \{(a, b) \in \mathbb{Q} : \forall t : f(t) \geq at + b\}$$

et alors

$$f(x) = \sup_{(a,b)\in E_f} ax + b.$$

En effet pour tout $(a, b) \in E_f$ $ax + b \leq f(x)$ et le cas d'égalité est atteind lors de la tangeante à f au point x. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{B}) &= \mathbb{E}(\sup_{(a,b)\in E_f} aX + b|\mathcal{B}) \\ &\geq \sup_{(a,b)\in E_f} a\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + b \\ &= f(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))\end{aligned}$$

□

Proposition 1.15. *Convergence :*

1. Si X_n monotone croissant converge vers X alors $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})$ est monotone croissant et converge vers $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.
2. Si X_n est une suite positive alors $\liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \geq \mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{B})$
3. Si $|X_n| \leq Y$ avec $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $X_n \to X$ p.s alors $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.

1.3.1 Independance

Définition 1.16. Deux tribus $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont indépendantes si pour tout $A_1 \in \mathcal{B}_1$, $A_2 \in \mathcal{B}_2$ on a $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)$ (ou $\mathbb{E}(1_{A_1}1_{A_2}) = \mathbb{E}(1_{A_1})\mathbb{E}(1_{A_2})$). (def equivalente : pour tout $Z_1\mathcal{B}_1$ mesurable et Z_2 $\mathcal{B}_2$ mesurable on $\mathbb{E}(Z_1Z_2) = \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$.

Remarquer que si X_1 est $\mathcal{B}_1$ mesurable et X_2 est $\mathcal{B}_2$ mesurable alors X_1, X_2 sont indépendantes.

Proposition 1.17. *Soit $X \in L^1(\Omega, \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \mu)$ si X est $\mathcal{B}_1$ mesurable alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$ p.s*

Démonstration. Soit Z $\mathcal{B}_2$ mesurable alors $\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X))$. □

[séance d'exercices.]
[corrections exercices.]

2 Les Martingales discrètes

2.1 Definition de martingales/surmartingales/sousmartingales

Définition 2.1. On appelle une filtration une chaine emboité de tribu : $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots$.

Définition 2.2. On dit qu'un processus X_n est adapté si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

Exemple 2.3. On peut penser aux exemples suivants

1. $\mathcal{F}_n = \{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), 0 \leq k \leq 2^n\}$ est une filtration
2. Les pavages emboités forment une filtration.
3. Soit X_i des variables aléatoires et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ est une filtration.
4. De manière trivial X_n est adapté pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.
5. Dans ce cas $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est aussi adapté pour $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$

Définition 2.4. (Martingale) Soit $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \mathcal{F}_n \subset \cdots$ une filtration. On dit que M_n est une martingale si c'est un processus adapté, pour tout n, $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$ et que pour tout $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) = M_m$$

que c'est une sous martigale si pour tout $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) \geq M_m$$

et surmartingale si pour tout $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) \leq M_m.$$

Exemple 2.5. Soit X_i des variable iid avec $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$. Alors $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est -une martingale ssi $\mathbb{E}(X) = 0$, une sousmartingale si$\mathbb{E}(X) \geq 0$ une surmartingale si $\mathbb{E}(X) \leq 0$.

Une martingale fermé : soit $\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_\infty$ et soit X $\mathcal{F}_\infty$ mesurable, $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Alors $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ est une martingale.

Remarque 2.6. Si M_n est une (sous/sur-)martingale et X $\mathcal{F}_0$ mesurable alors $M_n + X$ est une (sous/sur-)martingale.

Exemple : Les moyennes sur les sous segments.

Utilisation de Jensen :

Proposition 2.7. *Si M_n est une martingale et f une fonction convexe. alors $f(M_n)$ est une sous martingale*

Si M_n est sous-martingale et f une fonction convexe et croissante alors $f(M_n)$ est une sous martingale

Exemple :

Exemple 2.8. Le carré d'une martingale est une sous martingale, la valeur absolue d'une martingale est une sous martingale, l'exponentiel d'une sous-martingale est une sous-martingale.

2.2 Lemme martingale et les temps d'arrets

Lemme 2.9. *(Fondamental) Si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable (un processus prévisible), borné. Soit M_n un processus adapté. On définit*

$$(H \cdot M)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1})$$

Alors si M_n est une martingale alors $(H \cdot M)$ est une martingale

Si M_n est une sous martingale et $H \geq 0$ alors $(H \cdot M)$ est une sous martingale.

Démonstration. Dans le cas d'une martigale on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1})|\mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) + \mathbb{E}(H_n(M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (H \cdot M)_{n-1} + H_n\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (H \cdot M)_{n-1}.\end{aligned}$$

Dans le cas d'une sousmartingale et avec $H \geq 0$, il suffit de remplacer la dernière égalité par $\geq (H \cdot M)_{n-1}$. □

Le Lemme précédent est assez extraordinaire : a partir d'une martingale : on peut contruire un très grand nombre d'autre martingale. Dans énormement de cas pour résoudre un problème avec des Martingale, il suffit de considérer le bon processus prévisible H et d'utiliser le lemme.

Il a aussi une interprétation très naturelle. Supposer que vous jouiez à un jeu de hasard (pile ou face, roulette, dès,$\cdots$) et qu'à chaque tour vous misiez une certaine quantité d'argent. Supposons en plus que les règles du jeu soit équilibré et que Alors quelque soit votre statégie, c'est à dire la somme d'argent que vous misez à chaque tour, le jeu reste équilibré et en moyenne vous ne gagner ni ne perder rien.

Définition 2.10. (temps d'arret)

Soit $\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$ une filtration, et $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. T est un *temps d'arret si* pour tout n, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

Exemple de temps d'arret.

Exemple 2.11. Le temps d'arret constant, $\{T = n\} \in \{\emptyset, \Omega\}$

Exemple 2.12. Soit $A \subset \mathbb{R}$ mesurable et X_n un processus adapté alors $T := \inf\{n : X_n \in A\}$ est un temps d'arret. En effet $\{T = n\} = \cap_{\forall k<n}\{X_k \notin A\} \cap \{X_n \in A\}$. Par contre le maximum n'est en générale pas un temps d'arret.

Proposition 2.13. *On a*

1. $S \wedge T$ *est un temps d'arret*
2. $S \vee T$ *est un temps d'arret*
3. $\max S_i$ *est un temps d'arret,* $\inf S_i$ *est un temps d'arret*

Démonstration. $\{T \wedge S \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. $\{T \vee S \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Pareillement $\{\max S_i \leq n\} = \cap\{S_i \leq n\}$ et $\{\inf S_i \leq n\} = \cup\{S_i \leq n\}$ □

Exemple

Définition 2.14. On définit la tribu $\mathcal{F}_T$ associé au temps d'arret T par $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

On verifie que c'est bien une tribu : En effet $\Omega \cup \{T = n\} = \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$,

$$\cup_{i\in I} A_i \cap \{T = n\} = \cup_{i\in I}(A_i \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n$$

and $A^c \cap \{T = n\} = \{T = n\} \cap (A \cap \{T = n\})^c \in \mathcal{F}_n$. Donc stable par union dénombrable et complémentaire.

Interprétation c'est la tribu qui contient l'information de ce qui s'est passé avant le temps d'arret.

Proposition 2.15. *Soit deux temps d'arret* S *et* T *tel que* $S \leq T$ *alors* $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Proposition 2.16. *Soit* X_n *un processus adapté. On définit*

$$X_T = \begin{cases} X_n & si\ T = n \\ 0 & si\ T = \infty \end{cases}$$

Alors X_T *est* $\mathcal{F}_T$ *mesurable.*

Lemme 2.17. *Si* M_n *est une martingale (resp. sous martingale) alors* $M_{n\wedge T}$ *est une martingale (resp. sous martingale)*

Démonstration. On choisit le processus prévisible suivant

$$H_n = 1_{n \leq T}$$

En effet $H_n = 0 \Leftrightarrow T \leq n-1$ est donc bien $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable. Alors

$$(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{k \leq T}(M_k - M_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n \wedge T}(M_k - M_{k-1}) = M_{T \wedge n} - M_0$$

est une martingale. Puisque M_0 est $\mathcal{F}_0$ mesurable, $M_{T \wedge n} = (H \cdot M)_n + M_0$ est bien une martingale on en deduit le théorème de l'arret. □

On peut alors en déduire le théorème suivant.

Théorème 2.18. *Soit T est un temps d'arret tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $T \leq N$ p.s. Si (M_n) est une martingale alors*

$$\mathbb{E}(M_T) = M_0$$

Si M_n est une sousmartingale alors

$$\mathbb{E}(M_T) \geq M_0.$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_{T \wedge N}) = (\geq)\mathbb{E}(M_{T \wedge 0}) = \mathbb{E}(M_0)$$

où on a utiliser que $M_{n \wedge T}$ est une martingale (ou sousmartingale.) □

[séance exercices.]
[correction des exercices.]

3 Convergences de martingales

3.1 Convergence presque sure.

Proposition 3.1. *Nombre de montés de Doob.*

$$(b-a)\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \mathbb{E}((M_n - a)_+) - \mathbb{E}((M_0 - a)_+)$$

Démonstration. On définit une suite de temps d'arret. T_i et S_i $S_i = \inf\{k \geq T_{i-1} : M_k \leq a\}$ et $T_i := \inf\{k \geq S_i : M_k \geq b\}$. On vérifie que ce sont des temps d'arret : On a $\{T_i = n\} = \cup_{l \leq n}\{S_{i-1} = l\} \cap \{M_n \geq k\} \cap_{l \leq m < n} \{M_m < k\}$ ce qui permet de conclure par récurrence immédiate. Et on définit le processus

$$H_n = \sum_i 1_{S_i < n \leq T_i}$$

C'est un processus prévisible : en effet $1_{S_i < n \leq T_i} = 0 \Leftrightarrow \{T_i > n-1\} \cup \{S_i \geq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Puisque $()_+$ est convexe, $\tilde{M} = (M_n - a)_+$ est une sousmartingale. Donc

$$\begin{aligned}(H \cdot \tilde{M})_n &= \sum_i 1_{S_i < k \leq T_i} (\tilde{M}_k - \tilde{M}_{k-1}) \\ &= \sum_{i, T_i \leq n} (\tilde{M}_{T_i} - \tilde{M}_{S_i}) \\ &= \sum_{i \leq N_{a,b}} (\tilde{M}_{T_i} - \tilde{M}_{S_i}) \\ &\geq (b-a) N_{a,b}\end{aligned}$$

Donc

$$(b-a)\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \mathbb{E}((H \cdot \tilde{M})_n) \leq \mathbb{E}((1 \cdot \tilde{M})_n) = \mathbb{E}((M_n - a)_+) - \mathbb{E}((M_0 - a)_+)$$

□

Consequense : si $\mathbb{E}((M_n - a)_+) \leq C < \infty$ il y a en moyenne au plus $\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \frac{C}{(b-a)}$.

Si l'espérance de $\mathbb{E}((M_n - a)_+)$ est borné uniformément pour tout n, le nombre d'aller retour entre a et b est alors fini presque surement.

Théorème 3.2. *Théorème convergence presque sur.*
Si $\mathbb{E}((M_n)_+) \leq C < \infty$ pour tout n. Alors M_n converge presque surement.

Lemme 3.3. *Si pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$,$N_{a,b} < \infty$ alors il existe l tel que $u_n \to l$.*

Preuve : Pour tout $a \leq b$, au bout d'un certain temps : $u_n \geq a$ ou $u_n \leq b$. On $b_\infty = \inf b$ comme précédemment et $a_\infty = \sup a$ comme précédemment.

3.2 Convergence L^p

Proposition 3.4. *Inégalité maximale de Doob. Soit M_n une sousmartingale et $a \geq 0$. Alors*

$$a\mathbb{P}(\exists k \leq n : M_k \geq a) \leq \mathbb{E}(M_n 1_{\sup_{k \leq n} M_k \geq a}) \leq \mathbb{E}((M_n)_+)$$

Démonstration. On introduit $T = \inf\{k : M_k \geq a\}$. Alors

$$a\mathbb{P}(\exists k \leq n : M_k \geq a) \leq \mathbb{E}(M_T 1_{T \leq n})$$

□

Exercice 3.5. Soit M_n une sousmartingale et S, T deux temps d'arret. Si $S \leq T$ alors $\mathbb{E}(M_S) \leq \mathbb{E}(M_T)$.

En effet on choisit le processus prévisible $H_n = 1_{S < n \leq T}$ alors on a

$$M_T = M_S + (H \cdot M)$$

En particulier $0 = \mathbb{E}((H \cdot M)_0) \leq \mathbb{E}(H \cdot M)$
Dans la suite, nous notons $\tilde{M}_n = \sup_{k \leq n} M_k$.

Proposition 3.6. *Comparaisons martingale/maximum de martingale. Soit $p > 1$,*

1. *Soit une sous martingale positive, alors*
$$\mathbb{E}(\tilde{M}_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(M_n^p).$$
2. *Soit M_n uue martingale, alors*
$$\mathbb{E}(|\tilde{M}_n|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_n|^p).$$

Théorème 3.7. *Théorème de convergence dans L^p. Soit $p > 1$.*

1. *Soit M_n une sousmartingale positive tel que $\exists C > 0$, pour tout n $\mathbb{E}(M_n^p) \leq C$ alors il existe M_∞ tel que $M_n \to M_\infty$ p.s. et dans L^p.*
2. *Soit M_n une martingale tel que $\exists C > 0$, pour tout n $\mathbb{E}(|M_n|^p) \leq C$ alors il existe M_∞ tel que $M_n \to M_\infty$ p.s. et dans L^p.*

3.3 Convergence L^1

Définition 3.8. On dit que M_n est une martingale fermée si il existe Z, $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ tel que $M_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$.

Théorème 3.9. *Soit M_n une martingale. On a équivalence entre*

1. *M_n converge p.s. et dans L^1.*
2. *M_n est une martingale fermée.*

Démonstration. Supposons que $M_n \to M_\infty$ p.s. et dans L^1. Soit $A \in \mathcal{F}_n$ alors pour tout $m \geq n$
$$\mathbb{E}(1_A M_m) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(1_A M_n)$$
et donc puisque l'on a convergence dans L^1
$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(1_A M_m) = \mathbb{E}(1_A M_\infty)$$
soit $\mathbb{E}(1_A M_\infty) = \mathbb{E}(1_A M_n)$ de plus M_n est bien $\mathcal{F}_n$ mesurable. Par unicité de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n$.

Supposons maintenant que M_n soit une martingale fermée. Soit $\epsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}(|Z| 1_{|Z|>C}) \leq \epsilon$. On pose $M_n^{(1)} = \mathbb{E}(|Z| 1_{|Z|\leq C}|\mathcal{F}_n)$ et $M_n^{(2)} = \mathbb{E}(|Z| 1_{|Z|>C}|\mathcal{F}_n)$. On a $M_n = M_n^{(1)} + M_n^{(2)}$. Ainsi que $|M_n^{(1)}| \leq C$ et $\mathbb{E}(|M_n^{(2)}|) \leq \epsilon$. Alors $M_n^{(1)}$ est une martingale uniformement borné, elle converge donc p.s. De plus par $|M_n^{(1)}| \leq C$ et convergence dominé alors $M_n^{(1)}$ converge dans L^1. Il existe donc N tel que pour tout $n, m \geq N$, $\mathbb{E}(|M_n^{(1)} - M_m^{(1)}|) < \epsilon$ et donc
$$\mathbb{E}(|M_n - M_m|) \leq \mathbb{E}(|M_n^{(1)} - M_m^{(1)}|) + \mathbb{E}(|M_n^{(2)}|) + \mathbb{E}(|M_m^{(2)}|) < 3\epsilon.$$
Ainsi M_n est une suite de Cauchy dans L^1 et donc converge dans L^1. Puisque pour tout n, $\mathbb{E}(|M_n|) \leq \mathbb{E}(|Z|)$, on a également la convergence p.s. □

Exemple 3.10. Soit $f \in L^1([0,1])$. Considérons

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(t) 2^n \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f(s)ds.$$

Alors f_n converge vers f p.s. sur $[0,1]$ et dans L^1.

3.4 Le Théorème centrale limite pour les martingales

Rappel pour le théorème centrale limite classique. On a $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec X_i des variables iid integrables tel que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$. Alors on a la convergence en loi

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

ou $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi gaussienne.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}S_n}) &= \mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^n i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}X_j}) \\
&= \left[\mathbb{E}(e^{i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}X_1})\right]^n \\
&= \left[1 + i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}\mathbb{E}(X_1) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2 n}\mathbb{E}(X_1) + o(\frac{\alpha^2}{n})\right]^n \\
&= \left[1 - \frac{\alpha^2}{n} + o(\frac{\alpha^2}{n})\right]^n \\
&= \exp(-\alpha^2 + o(1))
\end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. □

Remarquer que S_n est une martingale particulière. On va maintenant adapter ce théorème à un ensemble de martingale plus générale.

Théorème 3.11. *Soit M_n une martingale, $M_0 = 0$ tel que*

1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout n, $|M_{n+1} - M_n| < C$,*
2. *$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n) \to \sigma^2$ p.s. pour $N \to \infty$.*

Alors

$$\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

pour $N \to \infty$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,on cherche à calculer $\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}})$ pour cela on introduit F_n un processus prévisible tel que $e^{i\alpha\frac{M_n}{\sigma\sqrt{N}} - F_n}$ soit une martingale. Construisons ce F_n, on a

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_n}{\sigma\sqrt{N}} - F_n} | \mathcal{F}_{n-1}) = e^{i\alpha\frac{M_{n-1}}{\sigma\sqrt{N}} - F_{n-1}}$$

soit

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_n-M_{n-1}}{\sigma\sqrt{N}}}|\mathcal{F}_{n-1}) = e^{F_n-F_{n-1}}$$

alors

$$1+\frac{i\alpha}{\sigma\sqrt{N}}\mathbb{E}(M_n-M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1})-\frac{\alpha^2}{\sigma^2 N}\mathbb{E}((M_n-M_{n-1})^2|\mathcal{F}_n)+o(\frac{1}{n}) = e^{F_n-F_{n-1}}$$

Puisque M_n est une martingale $\mathbb{E}(M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ et donc

$$F_n - F_{n-1} = -\frac{\alpha^2}{\sigma^2 N}\mathbb{E}((M_n-M_{n-1})^2|\mathcal{F}_n)+o(\frac{1}{N})$$

Ainsi

$$F_N = \sum_{n=1}^{N}(F_n-F_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} -\frac{\alpha^2}{\sigma^2 N}\mathbb{E}((M_n-M_{n-1})^2|\mathcal{F}_n)+o(\frac{1}{N}) = -\alpha^2+o(1)$$

Conclusion

$$1 = \mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_0}{\sigma\sqrt{N}}-F_0}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}-F_N}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}+o(1)}\right)e^{\alpha^2}$$

Et on peut conclure $\mathbb{E}\left(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}}\right) = e^{-\alpha^2+o(1)}$ qui est bien la fonction caractéristique de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. □

4 Introduction aux chaine de Markov sur un ensemble discret

4.1 Définition des chaine de Markov

On peut décrire une chaine de Markov comme un processus aléatoire qui ne dépend pas du passé.

Définition 4.1. Soit E un ensemble dénombrable. On définit une matrice stochastique $Q : E \times E \to [0,1]$ tel que pour tout $x \in E$, $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$.

Définition 4.2. Une chaine de Markov associée à la Q est un processus X_n tel que

$$\mathbb{P}(X_n = x|X_0,\cdots,X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x|X_{n-1}) = Q(X_{n-1},x)$$

Exemple de Chaine de Markov : X_n des variables iid, S_n la somme de variables aléatoires, Une marche aléatoire sur des graphe,..

Remarque : il est possible de considérer des chaines de Markov dites inhomogène avec une matrice stochastique différente à chaque étape $\mathbb{P}(X_n = x|X_{n-1}) = Q_n(X_{n-1},x)$. Mais on ne s'intéressera dans la suite qu'à des chaines de Markov homogène.

4.1.1 Propriétés élémentaires de la matrice stochastique.

Définition 4.3. Une matrice stochastique Q agit sur les mesures de probabilité via

$$[Q\mu](y) = \sum_x \mu(x)Q(x,y).$$

Elle définit également une application sur l'ensemble des fonctions bornées sur E.

$$[Qf](x) = \sum_y Q(x,y)f(y).$$

Remarquer que l'on a bien $\sum_y [Q\mu](y) = 1$. Ces deux applications sont duales l'une de l'autre. En effet

$$\langle \mu, Qf\rangle = \sum_x \mu(x)Qf(x) = \sum_{x,y} \mu(x)Q(x,y)f(y) = \sum_x Q\mu(x)f(x) = \langle \mu, Qf\rangle$$

Proposition 4.4. *Le produit de matrices stochastique est une matrice stochastique.*

$$\sum_z [Q_1Q_2](x,z) = \sum_{z,y} Q_1(x,y)Q_2(y,z) = \sum_{,y} Q_1(x,y)\sum_z Q_2(y,z) = 1$$

4.1.2 Propriétés élémentaire de la chaine de Markov

Proposition 4.5. *On a*

1. *Pour tout* $(x_0,\cdots,x_n) \in E^{n+1}$, $\mathbb{P}(X_n = x_n,\cdots,X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0,x_1)Q(x_1,x_2)\cdots Q(x_{n-1},x_n)$.
2. *Si* μ *décrit la probabilité de* X_n *alors* $Q\mu$ *décrit la probabilité de* X_{n+1} *et pour tout* k $Q^k\mu$ *décrit la probabilité de* X_{n+k}.
3. X_{nk} *est une chaine de Markov de matrice stochastique* Q^k.
4. $\mathbb{E}_x(f(X_1)) = Qf$. *Plus généralement* $\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = Qf(X_n)$

4.2 Markov et martingale

On dit que f est harmonique si $Qf = f$, que f est sous harmonique si $Qf \geq f$ et surharmonique si $Qf \leq f$ On a la relation suivante

Proposition 4.6. *Soit* X_n *une chaine de Markov. Alors* $f(X_n)$ *est une (sous/sur)martingale ssi* f *est (sous/sur)harmonique.*

Démonstration. $\mathbb{E}(f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(f(X_n)|X_{n-1}) = \sum_y Q(X_{n-1},y)f(y) = f(X_{n-1})$ car f est harmonique. □

Exercice 4.7. Si f est harmonique sur G et soit $T = \inf\{n : X_n \notin G\}$ alors $f(X_{n\wedge T})$ est une martingale.

Exercice 4.8. Le temps d'arret d'une marche aléatoire non symétrique. Soit X_i iid avec $\mathbb{P}(X_i = 1)$ avec proba $1-p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1)$ avec probabilité p.

$S_n = x + \sum X_i$. Dans un exercice précédent $T_a = \inf\{n : S_n = a\}$ et $T_b = \inf\{n : S_n = b\}$ avec $a \leq x \leq b$. $T = T_a \wedge T_b$. $\mathbb{P}(T = T_a)$ avec une martingale et le théorème de l'arret.

L'idée introduire la fonction $f(n) = \left(\frac{p}{(1-p)}\right)^n$.

1-Montrer que f est harmonique.

On note $q = (1-p)$ alors

$$Qf(n) = p\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + q\frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p^n q}{q^n} + \frac{p^n p}{q^n} = \frac{p^n}{q^n}(p+q) = f(n)$$

.

2-Calculer $\mathbb{P}(T = T_a)$

$f(X_n)$ est une martingale. Donc

$$\frac{p^x}{q^x} = \mathbb{E}(f(X_0)) = \mathbb{E}(f(X_{n\wedge T})) \to \mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{P}(T = T_a)\frac{p^a}{q^a} + (1-\mathbb{P}(T = T_a))\frac{p^b}{q^b}$$

Car la martingale est borné max $\frac{p^b}{q^b}, \frac{p^a}{q^a}$.

$$\mathbb{P}(T = T_a) = \frac{\frac{p^x}{q^x} - \frac{p^b}{q^b}}{\frac{p^a}{q^a} - \frac{p^b}{q^b}}.$$

4.3 Propriétés de Markov faible et forte

Ces propriétés sont centrale pour les procéssus de Markov et dans le cours on les reverra et utilisera beaucoup pour le mouvement brownien.

Soit μ une mesure de proba sur E. On note $\mathbb{E}_\mu$ pour le processus de Markov avec condition initiale X_0 de loi aléatoire μ et simplement $\mathbb{E}_x$ si $\mu = \delta_x$.

Opérateur de décalage : $\theta_n : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$ qui à $\theta_n(x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots) = (x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}, \cdots)$

La particularité de la chaine de Markov est tel que conditionnellement au point d'arrivé X_n au temps n, ce qui s'est passé avant $n-1$ et ce qui ce passe après n sont indépendant. Qui plus est puisque la chaine de Markov est homogène une chaine de Markov démarrée au temps n a la même loi qu'une chaine de Markov commencé au temps 0. C'est formellement ce qu'affirme le théorème suivant

Théorème 4.9. *(Propriété de Markov faible)*

Soit $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ avec F , $\mathcal{F}_n$ mesurable. Alors

$$\mathbb{E}_\mu(F(G \circ \theta_n)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G)).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $F = 1_{X_0=x_0, X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n}$ et $G = 1_{X_0=z_0, X_1=z_1, \cdots, X_l=z_l}$. Alors $G \circ \theta_n = 1_{X_n=z_0, X_{n+1}=z_1, \cdots, X_{n+l}=z_l}$ et

$$\mathbb{E}_{X_n}(G) = 1_{X_n=z_0} Q(z_0, z_1)Q(z_1, z_2) \cdots Q(z_{n-1}, z_n).$$

Finallement

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_n))\\
&=\mathbb{E}_\mu 1_{X_0=x_0,X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n}1_{X_n=z_0,X_{n+1}=z_1,\cdots,X_{n+l}=z_l}\\
&=\mu(x_0)Q(x_0,x_1)\cdots Q(x_{n-1},x_n)1_{x_n=z_0}Q(z_0,z_1)Q(z_1,z_2)\cdots Q(z_{n-1},z_n)\\
&=\mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G))
\end{aligned}$$

Dans le cas générale $F=\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i$ et $G=\sum_{j=1}^M \beta_j G_j$ alors

$$\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_n))=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\mathbb{E}_\mu(F_i(G_j\circ\theta_n))=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\mathbb{E}_\mu(F_i\mathbb{E}_{X_n}(G_j))=\mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G))$$

et on peut l'étendre à toute fonction F,G mesurable en prenant une F^n et G^n pouvant s'exprimer avec un nombre fini de fonction indicatrice et tel que $F^n\to F$, $G^n\to G$ dans L^1. □

On peut améliorer considérablement la propriété de Markov simple en considérant non pas un arret fixé à l'avance n mais avec un temps d'arret.

Théorème 4.10. *Propriété de Markov Forte*

Soit T un temps d'arret finit presque surement, $F,G:\Omega\to\mathbb{R}$ borné avec F $\mathcal{F}_T$ mesurable alors par propriété de Markov faible

$$\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_T))=\mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_T}(G)).$$

Démonstration. Remarquer que $1_{T=n}F$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable et donc

$$\mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F(G\circ\theta_n))=\mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F\mathbb{E}_{X_n}(G)).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_\mu(F(G\circ\theta_T))=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F(G\circ\theta_n))=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_\mu(1_{T=n}F\mathbb{E}_{X_n}(G))=\mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_T}(G)).$$

□

Proposition 4.11. *Soit F et G deux ensemble disjoint tel que $E=F\cup G$ et soit g une fonction borné définit G. Soit $T=\inf\{n:X_n\in G\}$. On pose*

$$h(x)=\mathbb{E}_x(1_{T<\infty}g(X_T))$$

alors

1. *h est harmonique sur F,*
2. *$h(y)=g(y)$ pour tout $y\in G$.*

Si de plus $T<\infty$ p.s, alors h est l'unique fonction borné qui satisfait ces propriétés.

Démonstration. Pour tout $x \in G$, conditionnellement à $X_0 = x$ on a immediatement $T = 0$ et donc $h(x) = g(X_0) = g(x)$.

Pour $x \in F$, alors $T \geq 1$. On remarque que $X_T \circ \theta_1 = X_T$. Par propriété de Markov faible on a

$$h(x) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_1}(1_{T<\infty} g(X_T))) = \sum_y Q(x,y)\mathbb{E}_y(1_{T<\infty} g(X_T)) = Qh(x)$$

Et donc h est bien harmonique.

Supposons maintenant que $T < \infty$. Soit h' une autre fonction borné harmonique sur F et égale à g sur G. On introduit

$$M_n = h'(X_{n\wedge T})$$

D'après le Théorème, M_n est une martingale donc pour tout n.

$$h'(x) = \mathbb{E}_x(h'(X_0)) = \mathbb{E}_x(h'(X_{n\wedge T}))$$

Puisque $T < \infty$ p.s et $h'(X_{n\wedge T}) \to h'(X_T) = g(X_T)$ p.s. De plus $h'(X_{n\wedge T})$ est bornée et par convergence dominé on conclut donc que

$$h'(x) = \mathbb{E}_x(g(X_T)) = h(x)$$

d'où l'unicité de h. $\square$

4.4 Application Le problème de Dirichlet discret.

Soit $B \subset \mathbb{Z}^d$ on définit le Laplacient discret Δ sur les fonction $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ ainsi

$$[\Delta u](x) = \frac{1}{2d} \sum_{|y-x|=1} (u(y) - u(x))$$

Soit g une fonction sur ∂B. On cherche u tel que

1. $\Delta u|_B = 0$,
2. $u(y) = g(y)$ pour tout $y \in \partial B$.

On observe que $\Delta u|_B = 0$ est équivalent à $u(x) = \frac{1}{2d}\sum_{|y-x|=1} u(y)$ soit $u(x) = Qu(x)$ avec Q la matrice stochastique de la marche aléatoire $X_n$sur le graphe $\mathbb{Z}^d$. Ainsi u est harmonique et $T = \inf\{n : X_n \notin B\}$ est fini presque surement car B est borné. Ainsi

$$u(x) = \mathbb{E}_x(g(X_T))$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet.

Deuxième partie

Mouvement Brownien

5 Introduction au mouvement brownien

5.1 Rappel Vecteurs Gaussiens.

Les vecteurs gaussiens sont une classe de variables aléatoires qui étandent les variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ en tout dimension ($\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$).

Remarque 5.1. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne μ_1, μ_2 et de variance σ_1^2, σ_2^2 alors $X_1 + X_2$ est une variable gaussienne de moyenne $\mu_1 + \mu_2$ et de variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Définition 5.2. On dit que $X = (X_1, \cdots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si chaque i, X_i est gaussien et de plus pour tout $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^d a_i X_i$ est une variable gaussienne.

Exemple 5.3. On a

1. Par la remarque précédente soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ où les X_i sont des gaussiennes indépendantes alors X est un vecteur gaussien.
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ et $X = (X_1, \cdots, X_n)$ avec X_i des gaussiennes indépendantes, alors $Y = (AX)_i = \sum_j A_{ij} X_j$ est un vecteur gaussien.

En effet soit $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{i=1}^d a_i Y_i = \sum_{i \leq d, j \leq n} a_i A_{ij} X_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^d a_i A_{ij}) X_j$$

c'est bien une variable gaussienne une fois encore en utilisant la remarque. Il se trouve que tous les vecteurs gaussiens peuvent s'exprimer de la sorte.

Proposition 5.4. *Soit Y un vecteurs gaussien alors il existe $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ et $X = (X_1, \cdots, X_n)$ avec X_i des gaussiennes indépendantes tel que $Y = AX$.*

Un vecteur gaussien est caractérisé par sa matrice de covariance

$$C_{ij} = \mathbb{E}((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)).$$

Exemple 5.5. Si X_i sont iid centré ($\mu = 0$) et normé : $\sigma = 1$ alors $C = I_n$ (la matrice identité).

Si $Y = AX$ avec X comme précédemment, alors on a $C = A^t A$.

5.2 Limite de somme de variables aléatoires iid.

La principale motivation pour introduire le mouvement brownien est qu'il apparait naturellement dans la limite de somme de variables indépendantes.

L'élement centrale ici est le théorème centrale limite : Soit X_i des variables iid, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = 1$, on pose

$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i.$$

Théorème 5.6. *Soit $0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$. Alors on a la convergence en loi*

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \cdots, S_{t_k}^{(n)}) \to (U_{t_1}, \cdots, U_{t_k})$$

tel que :

1. *$U_{t_1}, (U_{t_2} - U_{t_1}), \cdots, (U_{t_k} - U_{t_{k-1}})$ sont indépendants.*
2. *Pour tout $i \leq k$ $(U_{t_2} - U_{t_1})$ est gaussien de variance $t_2 - t_1$.*

Avant de prouver ce théorème on va rappeler un Lemme que l'on utilisera par la suite.

Lemme 5.7. *Si pour n, X_n et Y_n sont indépendant et $X_n, Y_n \to X, Y$ en loi alors (X, Y) sont indépendant.*

On rappel que X et Y sont indépendants ssi pour toutes fonctions f, g bornées continues $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$.

Démonstration. Pour f,g continues bornés : alors $\mathbb{E}(f(X_n)g(Y_n)) = \mathbb{E}(f(X_n))\mathbb{E}(g(Y_n)$ car X_n, Y_n sont indépendant. Puisque $X_n, Y_n \to X, Y$ en loi alors on a $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$, $\mathbb{E}(g(Y_n)) \to \mathbb{E}(g(Y))$ et $\mathbb{E}(f(X_n)g(Y_n)) \to \mathbb{E}(f(X)g(Y))$. On peut alors conclure

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \lim \mathbb{E}(f(X_n))\mathbb{E}(g(Y_n) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

□

Preuve du Théorème 5.6. On a pour tout $i < k$

$$S_{t_{i+1}}^{(n)} - S_{t_i}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{\lfloor nt_{i+1} \rfloor} X_l - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{\lfloor nt_i \rfloor} X_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=\lfloor nt_i \rfloor + 1}^{\lfloor nt_{i+1} \rfloor} X_l$$

Tous les termes X_i apparaissant dans la sommes sont différents de ceux des autres $S_{t_{j+1}}^{(n)} - S_{t_j}^{(n)}$ $(j \neq i)$. On a donc l'indépendance des $(S_{t_{i+1}}^{(n)} - S_{t_i}^{(n)})$ car les X_l sont indépendants. On utilise alors le Théorème centrale limite dont nous redonnons la preuve ci dessous :

Tout d'abord on a la convergence en loi, ssi $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$ pour toute fonction f continue borné. Cependant pour montrer la convergence il est suffisant de ne considérer que les fonctions $x \to \exp(i\alpha x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ c'est à dire montrer que $\mathbb{E}(\exp(i\alpha X_n)) \to \mathbb{E}(\exp(i\alpha X))$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

On rappel que si X est gaussien de variance σ alors

$$\mathbb{E}(\exp(i\alpha X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2 - i\alpha x} dx = e^{-\sigma^2\alpha^2/2}.$$

Interessons nous maintenant à la somme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(i\alpha S^{(n)}_{t_{j+1}} - S^{(n)}_{t_j})) &= \mathbb{E}(\exp(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=\lfloor nt_i\rfloor+1}^{\lfloor nt_{i+1}\rfloor} X_l)) \\ &= \prod_{l=\lfloor nt_i\rfloor+1}^{\lfloor nt_{i+1}\rfloor} \mathbb{E}(\exp(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} X_l)) \\ &= \mathbb{E}(\exp(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} X_1))^{\lfloor nt_{i+1}\rfloor - \lfloor nt_i\rfloor}\end{aligned}$$

où on a utiliser l'indépendance des X_l à la deuxième ligne et qu'il était tous de même loi à la dernière ligne. De plus pour n grand on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(i\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}X_i)) &= \mathbb{E}(1 + (i\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}X_i) + \frac{1}{2}(i\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}X_i)^2 + o(\frac{1}{n}))) \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2n} + o(1)\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et pour finir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(i\alpha S^{(n)}_{t_{j+1}} - S^{(n)}_{t_j})) &= (1 - \frac{\alpha^2}{2n} + o(1))^{n(t_{i+1}-t_i)} \\ &\to \exp(-\alpha^2(t_{i+1} - t_i)/2).\end{aligned}$$

qui est la loi gaussienne de variance $\sigma^2 = (t_{i+1} - t_i)$. □

5.3 Définition et propriétés élémentaires du mouvement brownien.

Définition 5.8. On dit que $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien si

1. Pour tout $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ sont variables gaussiennes indépendantes de variance respectivement $\mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) = t_i - t_{i-1}$,
2. Pour tout $\omega \in \Omega$ $t \to B_t(\omega)$ soit continue.

Il découle immédiatement de la proposition que

1. $B_0 = 0$.
2. Pour tout t, B_t est une variable gaussienne centré de variance t.

Il est cependant possible de poser $M_t = x + B_t$ on dira alors que M_t est un mouvement brownien issue de x.

Remarque 5.9. Attention on considère ici un nombre non dénombrable de variables aléatoires. C'est en générale une très mauvaise idée car la théorie des probabilités a été construite pour manipuler seulement un nombre dénombrables d'objets en même temps. Rappelez vous la définition d'une tribu (σ-algèbre)) et d'une mesure. Prendre l'intersection (ou l'union) $\cap_{t\in\mathbb{R}}A_t$ crée à priori un ensemble non mesurable. Ici on est sauvé par la continuité du mouvement brownien. En effet connaitre B_t pour $t \in \mathbb{Q}$ alors par continuité c'est connaitre B_t pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{F}_t = \sigma((B_s)_{s\leq t})$ et $\mathcal{F}_\infty = \sigma((B_s)_{s\geq 0})$

Exemple 5.10. Considéront $A = \{\exists t \in [0,1] : B_t > 1\}$. En écrivant naivement $A = \cup_{t\in[0,1]}\{B_t > 1\}$ on ne peut pas déduire que $A \in \mathcal{F}_1$. Cependent si il existe t $B_t > 1$, alors pour $t_n \to t$ on a $B_{t_n} > 1$ à partir d'un certain n. En choisissant notre suite $t_n \in \mathbb{Q}$ alors il existe $t' \in \mathbb{Q}$ $B_{t'} > 1$ et donc

$$A = \cup_{t'\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}\{B_{t'} > 1\}$$

qui est l'union dénombrable d'ensemble $\mathcal{F}_1$ mesurable donc $\mathcal{F}_1$ mesurable.

Remarque 5.11. On parle aussi de « Mesure de Wiener » sur l'espace des fonctions continues munie de la tribu borelienne associée à la norme $\|.\|_\infty$. Il s'agit de la mesure μ sur

$$\mu(A) = \mathbb{P}((B_t)_{t\in[0,1]} \in A).$$

Proposition 5.12. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Alors*

1. *$-B_t$ est un mouvement brownien,*
2. *Pour tout $\gamma > 0$, $B_t^\gamma := \frac{1}{\gamma}B_{\gamma^2 t}$ est un mouvement brownien. (changement d'échelle)*
3. *Pour tout $s > 0$, $B_t^{(s)} := B_{t+s} - B_s$ est un mouvement brownien. Indépendant de $\mathcal{F}_s$ (Markov simple)*

Démonstration. Cela découle directement de la définition du mouvement brownien

1. (exo).
2. Puisque B_t est continue $t \to \frac{1}{\gamma}B_{\gamma^2 t}$ est bien continue. Soit $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, on considère les $(B_{t_{i+1}}^\gamma - B_{t_i}^\gamma) = \frac{1}{\gamma}B_{\gamma^2 t_{i+1}} - \frac{1}{\gamma}B_{\gamma^2 t_i} = \frac{1}{\gamma}(B_{\gamma^2 t_{i+1}} - B_{\gamma^2 t_i})$. Par la propriété du mouvement brownien B pour $\gamma^2 t_i < \gamma^2 t_2 < \cdots$. $(B_{\gamma^2 t_{i+1}} - B_{\gamma^2 t_i})$ sont des gaussiennes indépendantes et de variance $\gamma^2(t_{i+1} - t_i)$ et donc $\frac{1}{\gamma}(B_{\gamma^2 t_{i+1}} - B_{\gamma^2 t_i})$ est de variance $(t_{i+1} - t_i)$ (Donc B^γ est un mouvement brownien.)
3. Puisque B_t est continue $B_{t+s} - B_s$ est bien continue. Soit $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, on considère $(B_{t_{i+1}}^{(s)} - B_{t_i}^{(s)}) = (B_{t_{i+1}+s} - B_{t_i+s})$. Par propriété du mouvement brownien B pour les temps $t_1 + s < t_2 + s < \cdots$. On a $(B_{t_{i+1}+s} - B_{t_i+s})$ sont des variables gaussiennes indépendantes et de variance $t_{i+1} + s - (t_i + s) = t_{i+1} - t_i$.

$\square$

Proposition 5.13. *(Loi du tout ou rien)*
On définit

$$\mathcal{F}_{0+} := \cap_{s>0}\mathcal{F}_s.$$

La tribue $\mathcal{F}_{0+}$ est grossière ie pour tout A dans $\mathcal{F}_{0+}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ soit 1.

Cette proposition peut sembler un peu abstraite mais on peut la comprendre ainsi : Les accroissement du mouvement brownien sont indépendants. Aussi, en connaissant le mouvement brownien proche de $t = 0$, on ne peut pas prédire quoi que ce soit sur son évolution. À la limite $t \to 0^+$, on ne dispose de fait d'aucune information sur le processus.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F}_{0+}$. On utilise un fait général de la théorie de la mesure : Pour toute fonction f, $\mathcal{F}_\infty$ mesurable (bornée), on peut trouver $t_1 < t_2 \cdots < t_k$ et $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continue borné tel que $F(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_k})$ approxime f. Dans la suite on ne considère que des fonctions de cette forme ci. Calculons

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_k})).$$

Puisque F est continue, B_t est continue et $B_0 = 0$

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_k})) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}(1_A F(B_{t_1} - B_\epsilon, B_{t_2} - B_\epsilon, \cdots, B_{t_k} - B_\epsilon)).$$

De plus $A \in \mathcal{F}_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ donc

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1} - B_\epsilon, B_{t_2} - B_\epsilon, \cdots, B_{t_k} - B_\epsilon)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(F(B_{t_1} - B_\epsilon, B_{t_2} - B_\epsilon, \cdots, B_{t_k} - B_\epsilon))$$

car les accroissements sont indépendant de $\mathcal{F}_\epsilon$. À la limite on obtient

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_k})) = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(F(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_k})).$$

On en déduit que $\mathcal{F}_{0+}$ et $\sigma((B_t)_{t\geq 0})$ sont des tribus indépendantes. Or pour tout s $\mathcal{F}_s \subset \sigma((B_t)_{t\geq 0})$ et donc $\mathcal{F}_{0+} \subset \sigma((B_t)_{t\geq 0})$ soit $\mathcal{F}_{0+}$est indépendante avec elle même et donc elle est grossière : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$ et donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1. □

Voici quelques affirmations que l'on peut déduire de cette loi du tout ou rien.

Proposition 5.14. *Soit $\delta > 0$*

1. $\mathbb{P}(\sup_{0\leq s<\delta} B_s > 0) = 1$ *et* $\mathbb{P}(\inf_{0\leq s<\delta} B_s < 0) = 1$
2. $\mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_s = +\infty) = 1$ *et* $\mathbb{P}(\inf_{0\leq s} B_s = -\infty) = 1$

Démonstration. Soit $\epsilon < \delta$.

$$A = \cap_{\epsilon>0}\{\sup_{t\leq\epsilon} B_t > 0\}$$

On remarqe que $A \in \mathcal{F}_{0+}$. Soit $s > 0$ alors pour $\epsilon < s$ on a $\{\sup_{t\leq\epsilon} B_t > 0\} = \cup_{t\in[0,\epsilon]\cap\mathbb{Q}}\{B_t > 0\} \in \mathcal{F}_s$. Donc $A \in \mathcal{F}_s$ et donc $A \in \mathcal{F}_{0^+}$. Par la loi du tout ou rien on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1. On a

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}\{\sup_{t \leq \epsilon} B_t > 0\}$$

mais puisque $\mathbb{P}\{\sup_{t\leq \epsilon} B_t > 0\} \geq \mathbb{P}\{B_\epsilon > 0\} = 1/2$. On en déduit $\mathbb{P}(A) = 1$. Puisque$-B_t$ est aussi un mouvement brownien on a également

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq s<\delta} -B_s > 0) = 1 = \mathbb{P}(\inf_{0\leq s<\delta} B_s < 0) = 1.$$

2 : Soit $C > 0$ montrer $\mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_s > C) = 1$. Soit $\gamma > 0$

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_s > C) = \mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B^\gamma_s > C) = \mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_{\gamma^2 s} > \gamma C) = \mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_s > \gamma C)$$

Donc en particulier

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_s > C) = \lim_{\gamma \to 0} \mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_s > \gamma C) = \mathbb{P}(\sup_{0\leq s} B_s > 0) = 1.$$

Et on conclue le dernier point comme précédemment en utilisant que$-B_s$ est un mouvement brownien. □

5.4 Propriété de Markov forte.

Définition 5.15. Temps d'arret T est un temps d'arret ssi $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Exercice 5.16. Montrer que $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Exemple 5.17. $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ est un temps d'arret. En effet

$$\{T_a < t\} = \{\exists s \leq t : B_s = a\} = \{\inf_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} |B_s - a| = 0\} \in \mathcal{F}_t.$$

Comme pour les modèle à temps discret on définit la tribu associé au temps d'arret.

Définition 5.18. Tribu du temps d'arret T. $A \in \mathcal{F}_T$ ssi $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Théorème 5.19. *Propriété de Markov forte : Soit T un temps d'arret fini presque surement alors*

$$B^{(T)}_t = B_{T+t} - B_T$$

est un mouvement brownien. Deplus $B^{(T)}_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$.

Démonstration. On a immédiatement que $B^{(T)}_t$ est continue.

Soit $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et soit $A \in \mathcal{F}_T$. On veut montrer que

$$\mathbb{E}(1_A F(B^{(T)}_{t_1}, \cdots, B^{(T)}_{t_n},)) = \mathbb{E}(1_A)\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})) \tag{1}$$

on obtiendra ainsi que $B^{(T)}$ a la même loi que B et l'indépendance avec $\mathcal{F}_T$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$B_t^{(T)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} 1_{\frac{k}{2^m} \le T < \frac{k+1}{2^m}} (B_{T+t} - B_T)$$

on approxime $B_t^{(T)}$ de la manière suivante

$$B_t^{(T,m)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} 1_{\frac{k}{2^m} \le T < \frac{k+1}{2^m}} (B_{\frac{k+1}{2^m}+t} - B_{\frac{k+1}{2^m}}).$$

On a bien $B_t^{(T,m)} \to B_t^{(T)}$ pour $m \to \infty$ car le mouvement brownien est continue.

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T,m)}, \cdots, B_{t_n}^{(T,m)},)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(1_A 1_{\frac{k}{2^m} \le T < \frac{k+1}{2^m}} F((B_{\frac{k+1}{2^m}+t_1} - B_{\frac{k+1}{2^m}}), \cdots, (B_{\frac{k+1}{2^m}+t_n} - B_{\frac{k+1}{2^m}}))).$$

Puisque $A \in \mathcal{F}_T$, $A \cap \{T < \frac{k+1}{2^m}\}$ est $\mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}}$ mesurable et donc $1_A 1_{\frac{k}{2^m} \le T < \frac{k+1}{2^m}}$ est $\mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}}$ mesurable. Par propriété de Markov simple : $B_{\frac{k+1}{2^m}+t_1} - B_{\frac{k+1}{2^m}}$ est un mouvement brownien et est indépendant de $\mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}}$.

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T,m)}, \cdots, B_{t_n}^{(T,m)},)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(1_A 1_{\frac{k}{2^m} \le T < \frac{k+1}{2^m}}) \mathbb{E}(F((B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})) = \mathbb{E}(1_A)\mathbb{E}(F((B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})).$$

Enfin lorsque $m \to \infty$, $\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T,m)}, \cdots, B_{t_n}^{(T,m)},)) \to \mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T)}, \cdots, B_{t_n}^{(T)}))$ par continuité et on peut donc conclure (1). $\square$

6 Construction du Mouvement Brownien

Dans cette section, nous donnons une construction du mouvement brownien avec des fonctions triangulaire sur $[0, 1]$ et des variables gaussiennes indépendantes.

6.1 Espace Gaussien

Le mouvement brownien contient implicitement une infinité de variables gaussiennes. La bonne notion pour aborder cela est ce que l'on appelle un espace gaussien qui peut être vu comme la généralisation des vecteurs gaussien en dimension infini. On aura besoin pour cela d'un espace de Hilberts, par exemple $(L^2(\Omega, \mu))$. Quelques rappels :

Définition 6.1. On appelle un système orthonormé (base orthonormé) une famille $(\eta_i)_{i\in I} \in H^I$ tel que

1. $\|\eta_i\| = 1$
2. $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
3. Pour tout $f \in H$, $\sum_{i\in I} \langle \eta_i, f \rangle \eta_i$.

Quelque soit espace de Hilbert séparable H, il existe une telle base. Cette base est très pratique par exemple on a

$$\langle f, g\rangle = \sum_i \langle \eta_i, f\rangle\langle \eta_i, g\rangle.$$

En effet

$$\langle \sum_i \langle \eta_i, f\rangle \eta_i, \sum_j \langle \eta_i, g\rangle \eta_j\rangle = \sum_i \langle \eta_i, f\rangle \sum_j \langle \eta_i, g\rangle\langle \eta_i, \eta_j\rangle = \sum_i \langle \eta_i, f\rangle\langle \eta_i, g\rangle$$

car $\langle \eta_i, \eta_j\rangle = 0$ si $i \neq j$. En particulier

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \sum_i |\langle \eta_i, f\rangle|^2.$$

Définition 6.2. Soit un ensemble de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par un ensemble dénombrable de variables gaussiennes iid $\mathcal{N}_i$ centrées de variance 1. L'espace gaussien E est le sous espace linéaire fermé dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ engendré par les $\mathcal{N}_i$. On appelle *mesure gaussienne* l'application $\beta : H \to E$ définie par

$$\beta(f) = \sum_i \langle f, \eta_i\rangle \mathcal{N}_i.$$

Exemple 6.3. (Élémentaire)Si $H = \mathbb{R}^2$ avec la base orthorgonal $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Soit X, Y deux variables gaussiennes iid, on a $E = \{aX + bY : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $\beta((a, b)) = aX + bY$.

Voici quelques propriétés de la mesure gaussienne :

1. Pour tout f, $\beta(f)$ est une variable gaussienne centré.
2. Pour tout f, $\mathbb{E}(\beta(f)^2) = \|f\|^2$. En effet

$$\mathbb{E}(\beta(f)^2) = \mathbb{E}((\sum_i \langle f, \eta_i\rangle \mathcal{N}_i)^2) = \sum_i \langle f, \eta_i\rangle^2 \mathbb{E}((\mathcal{N}_i)^2) = \sum_i \langle f, \eta_i\rangle^2 = \|f\|^2$$

   car les $\mathcal{N}_i$ sont indépendantes et de variance 1.
3. Pour tout $f, g \in H$, $\mathbb{E}(\beta(g)\beta(f)) = \langle f, g\rangle$.En effet

$$\mathbb{E}(\beta(f)\beta(g)) = \sum_{i,j} \langle f, \eta_i\rangle\langle g, \eta_j\rangle \mathbb{E}((\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j)) = \sum_i \langle f, \eta_i\rangle\langle g, \eta_i\rangle = \langle f, g\rangle$$

   car les $\mathcal{N}_i$ sont indépendantes et de variance 1.
4. Pour tout $f, g \in H$ $\beta(f)$ et $\beta(g)$ sont indépendant $\Leftrightarrow$ f et g sont orthogonaux.

En effet par la propriété précédente : $\langle f, g\rangle = 0$ ssi $\mathbb{E}(\beta(g)\beta(f)) = 0$. On utilise alors propriété des vecteurs gaussiens : la covariance nulle est équivalent l'indépendance.

6.2 Construction du mouvement brownien sur $[0, 1]$.

Soit $H = L^2([0,1])$ et on introduit le système orthonormé $\Big(1, (h_i^n)_{i,n}\Big)$ où

$$(h_i^n)_{i<2^n} := 2^{\frac{n}{2}}(1_{\frac{2i}{2^{n+1}},\frac{2i+1}{2^{n+1}}} - 1_{\frac{2i+1}{2^{n+1}},\frac{2i+2}{2^{n+1}}})$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i < 2^n$. On définit alors

$$g_i^n(t) = \int_0^t h_i^n(s)ds = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}(t - \frac{2i}{2^{n+1}}) & \text{si } t \in [\frac{2i}{2^{n+1}}, \frac{2i+1}{2^{n+1}}] \\ 2^{\frac{n}{2}}(\frac{2i+2}{2^{n+1}} - t) & \text{si } t \in [\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{2i+2}{2^{n+1}}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose

$$B_t := t\mathcal{N}_{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\leq 2^n} g_i^n(t)\mathcal{N}_{n,i} \tag{2}$$

où $\mathcal{N}_{-1}$ et les $\mathcal{N}_{n,i}$ sont des gaussiennes iid de variance 1.

Théorème 6.4. *Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ définit par (2) est un mouvement brownien.*

Démonstration. Tout d'abord montrons qu'il a la même loi. On remarque que $g_i^n(t) = \langle 1_{[0,t]}, h_i^n\rangle$ et on peut donc écrire

$$B_t = \langle 1_{[0,t]}, 1\rangle\mathcal{N}_{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\leq 2^n} \langle 1_{[0,t]}, h_i^n\rangle\mathcal{N}_{n,i}.$$

Conclusion on a

$$B_t = \beta(1_{[0,t]})$$

où β est la mesure gaussienne définit sur $L^2([0,1])$. Soit $0 < t_1 < \cdots < t_n$. Pour tout $i < n$ o a

$$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} = \beta(1_{[0,t_{i+1}]}) - \beta(1_{[0,t_i]}) = \beta(1_{[t_i,t_{i+1}]}).$$

On en déduit alors que

1. Pour tout i, $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ est une variable gaussienne.
2. Les $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ sont indépendantes car $\langle 1_{[t_i,t_{i+1}]}, 1_{[t_j,t_{j+1}]}\rangle = 0$ si $i \neq j$. En effet les supports des $1_{[t_i,t_{i+1})}$ sont disjoints.
3. $\mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \|1_{[t_i,t_{i+1}]}\|^2 = t_{i+1} - t_i$.

Montrons maintenant la continuité. On écrit

$$G_n(t) := \sum_{i\leq 2^n} g_i^n(t)\mathcal{N}_{n,i}$$

soit

$$B_t := t\mathcal{N}_{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} G_n(t).$$

On va montrer la convergence L^∞ de $\sum_{n\in\mathbb{N}} G_n(t)$. Puisque la limite L^∞ de fonction continue est une fonction continue, cela nous permettra de conclure. Calculons

$$\|G_n\|_{L^\infty} = \sup_{i\leq 2^n-1} |\mathcal{N}_{n,i}|\times\|g_i^n\|_{L^\infty} = \sup_{i\leq 2^n-1} |\mathcal{N}_{n,i}|\times 2^{\frac{n}{2}}(\frac{2i+1}{2^{n+1}}-\frac{2i}{2^{n+1}}) = \sup_{i\leq 2^n-1} |\mathcal{N}_{n,i}|\times\frac{1}{2^{n/2+1}}$$

Lemme 6.5. *Si $\mathcal{N}$ est une variable gaussienne centré de variance 1 alors*

$$\mathbb{P}(|\mathcal{N}|\geq a)\leq \exp(-a^2/2)$$

On admettra ce Lemme dont la preuve est un simpe calcul. Montrons alors que, avec une probabilité proche de 1, $\|G_n\|_{L^\infty}$ ne peut pas être très grand.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|G_n\|_{L^\infty}\geq 2^{-(n/4)}) &\leq \mathbb{P}(\sup_{i\leq 2^n-1}|\mathcal{N}_{n,i}|\geq 2^{n/4})\\ &= \mathbb{P}(\exists i\leq 2^n-1 : |\mathcal{N}_{n,i}|\geq 2^{n/4})\\ &\leq 2^n\mathbb{P}(|\mathcal{N}_{n,i}|\geq 2^{n/4})\\ &\leq 2^n\exp(-2^{n/2}/2)\\ &\leq 2^n\times\frac{1}{4^n}\\ &\leq\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_n \mathbb{P}(\|G_n\|_{L^\infty}\geq 2^{-(n/4)})<\infty$$

Par le lemme de Borel Cantelli, p.s il existe un nombre fini de n tel que $\|G_n\|_{L^\infty}\geq 2^{-(n/4)}$. Conclusion p.s il existe $C>0$

$$\sum\|G_n\|_{L^\infty}<C+\sum_n 2^{-(n/4)}<\infty.$$

Conclusion $t\mathcal{N}_{-1}+\sum_{n\in\mathbb{N}}G_n(t)\to B_t$ dans L^∞ p.s et donc $(B_t)_{t\in[0,1]}$ est continue p.s. □

7 Fonction harmonique, mouvement brownien et problème de Dirichlet.

Définition 7.1. (Mouvement Brownien en toute dimension).

Soient $(B_t^{(1)}),\cdots,(B_t^{(d)})$ des mouvement brownien indépendant et on pose

$$B_t=\begin{pmatrix}B_t^{(1)}\\ \vdots\\ \vdots\\ B_t^{(d)}\end{pmatrix}$$

qui est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 7.2. *Pour $(B_t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, ceci est équivalent à*

1. *B_t est continue*
2. *Pour tout $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ les $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ sont indépendants*
3. *$(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ sont des vecteur gaussien (dans $\mathbb{R}^d$), de covariance $C_{ab} = \mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_a(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_b) = \begin{cases} t_{i+1} - t_i & si\ a = b \\ 0 & si\ a \neq b \end{cases}$ $C = (t_{i+1} - t_i)I_d$ où I_d est la matrice identité.*

Proposition 7.3. *Le mouvement brownien est isotrope : c'est à dire pour $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ (le groupe orthogonal sur $\mathbb{R}^d$) et B_t un mouvement brownien en dimension d alors $(AB_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien en dimension d.*

Démonstration. On a

1. Continuité oui AB_t est continue,
2. Incrément indépendant $AB_{t_{i+1}} - AB_{t_i} = A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$,
3. Combinaison linéaire d'un vecteur gaussien est un vecteur gaussien. La matrice de covariance
$$\tilde{C}_{ab} = \mathbb{E}((A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))_a(A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))_b)$$
on a
$$\tilde{C} = \mathbb{E}(A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))(A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^T) = A\mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^T)A^T = (t_{i+1} - t_i)AA^T = ($$

□

Corollaire 7.4. *Soit $r > 0$, $T = \inf\{t : \|B_t\| \geq r\} = \inf\{t : B_t \in S_r^{d-1}(0)\}$. Alors la loi de B_T est la loi uniform sur S_r^{d-1}.*

Démonstration. La loi uniforme sur la sphère est l'unique mesure de proba sur S_r^{d-1} qui soit invariante par rotation (par l'action de $\mathcal{O}_d(\mathbb{R})$). On peut conclure avec la proposition précédente. □

7.1 Problème de Dirichlet et fonction harmonique.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. On note Δ le Laplacien : Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$.

Définition 7.5. (definition classique) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$.

Définition 7.6. (definition via la moyenne) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on dit que f est harmonique si pour tout $x \in \Omega$, pour tout $r > 0$ tel que $B_r(x) \subset \Omega$
$$f(x) = \int_{S_r(x)} f(y)\mu_{S_r(x)}(dy)$$
où $\mu_{S_r(x)}$ est la mesure uniforme sur $S_r(x)$.

Remarque 7.7. (def moyenne)$\Rightarrow$(def classique).

Démonstration. Soit f qui est harmonique pour la moyenne, montrons que $\Delta f = 0$. On suppose $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

Soit $x \in \Omega$.

$$f(y) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} f|_x \cdot (y-x)_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_i x_j} f|_x (y-x)_j (y-x)_i + o(\|y-x\|^2) \tag{3}$$

□

$$f(x) = \int_{S_r(x)} f(x) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} f|_x \cdot (y-x)_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_i x_j} f|_x (y-x)_j (y-x)_i + o(\|y-x\|^2) \mu_{S_r(x)}(dy)$$

On a $\int_{S_r(x)} f(x) d\mu(dy) = f(x)$ car μ est une mesure de proba et $\int_{S_r(x)} o(\|y-x\|^2) d\mu = o(r^2)$. Ensuite

$$\int_{S_r(x)} (y-x)_i \mu(dy) = \int_{S_r(0)} y_i \mu(dy) = 0$$

car y_i est antisymétrique. De même si $i \neq j$

$$\int_{S_r(x)} (y-x)_j (y-x)_i \mu(dy) = \int_{S_r(0)} y_i y_j \mu(dy) = 0$$

encore une fois par antisymétrie de $y_i y_j$. Il reste le cas $i = j$. Par simétrie entre les indices on a

$$\int_{S_r(x)} y_i^2 \mu(dy) = \frac{1}{d} \sum_i \int_{S_r(x)} y_i^2 \mu(dy) = \frac{r^2}{d}.$$

L'équation (3) devient alors

$$f(x) = f(x) + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{r^2}{d} \times \partial_{x_i x_i} f|_x + o(r^2)$$

soit

$$0 = \frac{r^2}{2d} \times \sum \partial_{xx} f|_x + o(r^2).$$

On peut donc conclure $\Delta f = \sum \partial_{x_i x_i} f = 0$.

Définition 7.8. (Problème de Dirichlet.) Soit $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continue. On dit que h est une solution du problème de Dirichlet si

1. h est harmonique sur Ω,
2. Pour tout $x \in \partial\Omega$ $\lim_{y \to x} h(y) = g(x)$.

Théorème 7.9. *Supposons Ω borné et "sympa". Soit B_t un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}_x$ pour la loi du mouvement brownien issue de x (ie : $W_t = x + B_t$).*

Soit $T = \inf\{t : W_t \in \partial\Omega\}$. On pose

$$h(x) = \mathbb{E}_x(g(W_T))$$

alors h est solution au problème de Dirichlet. De plus elle est unique.

On ne définira pas ce que « sympa » veut dire, les conditions optimales pour que ce théorème soit valide sont loin d'être élémentaire. Cependant on pourra supposer ici que $\partial\Omega$ est lisse.

Démonstration. Montrons que h est harmonique : Soit $x \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $B_r^d(x) \subset \Omega$. $S = \inf\{t : W_t \in S_r(x)\}$. $B_r^d(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$ $S_r^{d-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| = r\}$

On a $S < \infty$ p.s. On a toujours $S < T$ car le mouvement brownien doit sortir de la sphère pour toucher $\partial\Omega$.

$$h(x) = \mathbb{E}_x(g(W_T)) = \mathbb{E}_x(g(W_T - W_S + W_S))$$

On sait que $W_{t+S} - W_S$ est un mouvement brownien par la propriété de Markov forte. $\tilde{W}_t = W_{t+S} - W_S + W_S$ c'est un mouvement brownien issue de W_S.

$\tilde{T} = T - S = \inf\{t \geq 0 : W_{t+S} - W_S + W_S \in \partial\Omega\}$.

$$h(x) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{W_S}(g(\tilde{W}_{\tilde{T}})))) = \mathbb{E}_x(h(W_S))$$

Puisque la loi de W_S est la loi uniforme sur $S_r^{d-1}(x)$ on

$$h(x) = \int_{S_r^{d-1}(x)} h(y)\mu(dy)$$

et donc h est harmonique.

Lemme 7.10. *Soit $x_0 \in \partial\Omega$. Si Ω est « sympa » alors pour tout $\delta > 0$ la probabilité que le mouvement brownien issue de x sorte de Ω sur l'intervale de temps $[0, \delta]$ temps vers 1 lorsque $x \to x_0 \in \partial\Omega$.*

Démonstration. Idée de la preuve. On suppose ici que le bord de Ω est régulier, alors quitte à appliquer une translation et une rotation on peut supposé que $x_0 = 0$ etle vecteur normale à la surface de Ω en x_0 est égale à $\vec{n} = (1, 0, \cdots, 0)$. Alors $\mathbb{P}(\exists t \in [0, \delta] : (x + W_t)_1 \leq 0) = \mathbb{P}(\exists t \in [0, \delta] : W_t^{(1)} \leq -x_1) \to \mathbb{P}(\inf_{t \leq \delta} W_t^{(1)} < 0) = 1$ lorsque $x \to x_0$ □

Alors on a $T \to 0$. Par continuité de W, W_T est dans un petit voisinage de x et de x_0. Enfin puisque g est continue $g(W_T) \to g(x_0)$ et on peut conclure

$$\mathbb{E}_x(g(W_T)) \to g(x_0).$$

□

Troisième partie
Martingales Continues

On considera des processus à temps continue $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. À la difference de processus discret $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut beaucoup travailler pour formaliser correctement ces objets et comprendre ce qui est «mesurable», « prévisible », intégrable... Dans toute la suite on considéra essentiellement des processus à trajectoires continue qui simplifiront beaucoup ce formalisme et nous ne nous attarderons pas dessus. Si l'exemple de base pour les martingales continues est la somme de variables iid de moyenne nulle, l'exemple de base des martingales continues est sans aucun doute le mouvement brownien.

8 Quelques propriétés des martingales continues

8.1 Définitions et exemples

Ici on utilisera le mot « continue » dans les deux sens, ces processus seront aussi à trajectoire continue, c'est à dire que $\forall\omega : t \to M_t(\omega)$ est une fontion continue de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Formellement la définition d'une martingale continue est la même que celle d'une martingale discrète.

Définition 8.1. Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec une filtration. On dit que $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale (resp surmartingale/sousmartingale) si

1. M_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable
2. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$
3. Pour $s \le t$ $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ (resp $\ge M_s$ ou $\le M_s$)

Remarque 8.2. On a

1. On supposera toujours que $(M_t)_{t\ge 0}$ est continue à droite (cad) c'est à dire pour tout t
$$\lim_{s\to t^+} M_s = M_t.$$
2. Pour tout $0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \le ...$ si on pose $N_n := M_{t_n}$ c'est une martingale discrète pour la filtration $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$.
3. Si on définit
$$M_t^{(n)} := M_{\frac{\lfloor 2^n t\rfloor}{2^n}} \tag{4}$$
on a alors
$$M_t^{(n)} \to M_t$$
p.s lorsque $n \to \infty$ par continuité à droite.

Exemple 8.3. Des martingales continue

1. Le mouvement brownien est une martingale continue :

$$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + B_s = B_s$$

   car B_s est $\mathcal{F}_s$ mesurable et $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et de moyenne nulle.
2. Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ un processus à accroissement indépendant. Pour $t \geq s$, $Z_t - Z_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.
   (a) $Z_t - \mathbb{E}(Z_t)$ est une martingale.
   (b) Si $\mathbb{E}(Z_t) = 0$, alors $Z_t^2 - \mathbb{E}(Z_t^2)$ est une martingale.
   (c) Le processus
   $$\frac{e^{Z_t}}{\mathbb{E}(e^{Z_t})}$$
   est une martingale (sous condition que les intégrales soient bien définis).

Exemple 8.4. On a en particulier
1. $B_t^2 - t$ est une martingale
2. $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$ est une martingale

Démonstration. Ce sont des cas particuliers de l'exemple précédent. On a en effet $\mathbb{E}(B_t^2) = t$ et $\mathbb{E}(e^{\gamma B_t}) = e^{\gamma^2 t/2}$. □

8.2 Quelques propriétés

Pour les martingales discrètes on a montré les théorèmes suivant
— Convergence p.s
— Convergence L^p
— Le nombre de monté de Doob,
— L'inégalité maximale de Doob
— Le theorème de l'arret.

Le but de cette partie du cours est de vérifier que ces propriétés restent valident lorsque l'on considère des martingales en temps continues. On peut commencer par « Jensen » :

Proposition 8.5. *(Jensen) Si M_t est une martingale et f une fonction convexe alors $f(M_t)$ est une sousmartingale.*

Si M_t est une sousmartingale et f une fonction convexe et croissante alors $f(M_t)$ est une sousmartingale.

Démonstration. (Même chose que pour le cas discret.) □

Soit $n \in \mathbb{N}$, dans le cas discret il est évident que $\max_{k\leq n} \mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ puisque pour chacun des termes $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$. Dans le cas continue c'est légèrement moins évident puisque l'on considère une infinité de terme. C'est le but de la proposition suivante

Proposition 8.6. *Soit M_t une martingale, alors pour tout $t \geq 0$*

$$\sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}(|M_s|) < \infty$$

Démonstration. La fonction $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est convexe croissant. Donc $f(M_t) = (M_t)^+$ est une sousmartingale. On a $|M_s| = 2(M_s)^+ - M_s$

$$\mathbb{E}(|M_s|) = 2\mathbb{E}((M_s)^+) - \mathbb{E}(M_s) = 2\mathbb{E}((M_t)^+) - \mathbb{E}(M_0) < \infty$$

car $\mathbb{E}(M_0) < \infty$ et $\mathbb{E}((M_t)^+) \leq \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$ □

Proposition 8.7. *(Nombre de montés de Doob) Soient $a < b$, et $(M_s)_{s\geq 0}$ une sousmartingale (cad) et soit*

$N_t = \max\{n : \exists s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < t_n \leq t : \forall i \leq n : M_{s_i} < a \text{ et } M_{t_i} > b\}$

(le nombre de fois que M_s fait des aller retour entre a et b.) Alors

$$(b-a)\mathbb{E}(N_t) \leq \mathbb{E}((M_t - a)^+) - \mathbb{E}((M_0 - a)^+).$$

Démonstration. On pose

$$M_t^{(n)} := M_{\frac{\lfloor 2^n t\rfloor}{2^n}}$$

alors $M_{\frac{k}{2^n}}^{(n)}$ est une martingale discrète. On note $N_t^{(n)}$ le nombre de monté pour $M_{\frac{k}{2^n}}^{(n)}$. Donc on a

$$(b-a)\mathbb{E}(N_t^{(n)}) \leq \mathbb{E}((M_t^{(n)}-a)^+) - \mathbb{E}((M_0^{(n)}-a)^+) \leq \mathbb{E}((M_t-a)^+) - \mathbb{E}((M_0-a)^+)$$

Remarque c'est $N_t^{(n)}$ est croissante en n car

$$\{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{\frac{k}{2^m} : k \in \mathbb{N}\}$$

si $m \geq n$. De plus on a que

$$N_t^{(n)} \to N_t$$

p.s. En effet on a $N_t^{(n)} \leq N_t$ car $\{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$. Soit $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < t_p \leq t : \forall i \leq p : M_{s_i} < a$ et $M_{t_i} > b$ alors puisque M_t est continue à droite il existe ϵ tel que pour tout $s \in [s_i, s_i + \epsilon]$ $M_s < a$ et $t \in [t_i, t_i + \epsilon]$ $M_s > b$. Il existe n tel que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ donc il existe $k_1 < q_1 < k_2 < q_2 \cdots$ tel que $\frac{k_i}{2^n} \in [s_i, s_i + \epsilon]$ et $\frac{q_i}{2^n} \in [t_i, t_i + \epsilon]$ pour tout $i \leq p$. Conclusion

$$N_t^{(n)} \geq p$$

et donc $N_t^{(n)} = N_t$ pour n suffisament grand. Pour finir

$$\mathbb{E}(N_t^{(n)}) \to \mathbb{E}(N_t)$$

par convergence monotone et donc $\mathbb{E}(N_t) \leq \mathbb{E}((M_t - a)^+) - \mathbb{E}((M_0 - a)^+)$. □

Corollaire 8.8. *Si il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ $\mathbb{E}(|M_t|) \leq C$ alors M_t converge p.s.*

Démonstration. (Même chose pour le cas discret) □

Proposition 8.9. *(Inégalité maximale de Doob)*

Soit M_t une sousmartingale alors pour tout $t \geq 0$ et $\lambda > 0$

1. *on a*
$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} M_s > \lambda) \leq \mathbb{E}(|M_0|) + 2\mathbb{E}(|M_t|)$$
2. *et*
$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |M_s|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_t|^p).$$

Démonstration. Déjà on a par continuité à droite de M_s

$$\sup_{s \leq t} M_s = \sup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t] \cup \{t\}} M_s$$

par l'inégalité maximale de Doob dans le cas discret on a

$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{\frac{k}{2^n} \leq t} M_{\frac{k}{2^n}} > \lambda) \leq \mathbb{E}(|M_0|) + 2\mathbb{E}(|M_t|)$$

et

$$\mathbb{E}(\sup_{\frac{k}{2^n} \leq t} |M_{\frac{k}{2^n}}|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_t|^p).$$

On peut conclure avec

$$\sup_{\frac{k}{2^n} \leq t} |M_{\frac{k}{2^n}}| \to \sup_{s \leq t} |M_s|$$

p.s lorsque $n \to 0$ par continuité à droite. □

Corollaire 8.10. *Soit $p > 1$. Si il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ $\mathbb{E}(|M_t|^p) \leq C$ alors M_t converge p.s et dans L^p.*

Démonstration. (Même chose pour le cas discret) □

8.3 Temps d'arret

On rappelle la définition donné dans la partie du mouvement brownien.

Définition 8.11. On dit que $T : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est un temps d'arret si $\{T \leq t\}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable. Et on définit la tribu du temps d'arret

$$\mathcal{F}_T = \{A : \forall t, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

En temps discret l'exemple typique du temps d'arret est $T_A = \inf\{n : X_n \in A\}$ avec X_n un processus adapté. En temps continue, c'est un peu plus délicat parce que l'union ou l'intersection d'un nombre non dénombrale d'ensembles n'est à priori pas mesurable. Il faut ajouter des conditions de régularité sur le processus et on ne peut pas choisir n'importe quel ensemble A non plus.

Proposition 8.12. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté (c'est à dire X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout t) sur un espace métrique O. Soit $A \subset 0$*

$$T_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

alors

1. *Si A est ouvert et X_t est cad alors T_A est un temps d'arret.*
2. *Si A est fermé et X_t est continu alors T_A est un temps d'arret.*

Démonstration. Si A est ouvert, alors

$$\{T_A \leq t\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} \{X_s \in A\} \cup \{X_t \in A\}$$

Le terme de gauche est inclu dans le terme de droite trivialement.

Si il existe $s < t$ tel que $X_s \in A$ alors il existe une petite boule de centre X_s de rayon δ tel que $B_\delta(X_s) \subset A$ car A est ouvert. Par continuité à droite il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $s' \in [s, s+\epsilon]$, $X_{s'} \in B_\delta(X_s) \subset A$. Donc il existe $s' \in [s, s+\epsilon] \cap \mathbb{Q}$, $X_{s'} \in A$. Et on a donc le terme de droite inclu dans le terme de gauche.

Conclusion $\{T_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et donc T_A est un temps d'arret.

Si A est fermé.

$$\{T_A \leq t\} = \{\inf_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} d(X_s, A) = 0\}$$

en effet puisque A est fermé $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

Supposons $\inf_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} d(X_s, A) = 0$ alors il exist $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $d(X_{q_n}, A) \to 0$. $[0,t]$ est compact, donc il existe $s \in [0,t]$ tel qu'une sous suite $q_{\phi(n)}$ converge vers s. Puisque (X_t) est continue alors

$$X_{q_{\phi(n)}} \to X_s$$

et donc $d(X_s, A) = 0$ soit $X_s \in A$.

On en déduit que $\{T_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ car $\inf_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} d(X_s, A)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable. □

Théorème 8.13. *(Théorème de l'arret.) Soient S, T deux temps d'arret telle que $S \leq T$ et $T < \infty$ p.s et $(M_s)_{s\geq 0}$ une martingale alors*

1. *$M_{t\wedge T}$ est une martingale.*
2. *Si $\sup \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$ alors $\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_S) = M_S$.*
3. *Si il existe $C > 0$ tel que $T \leq C$ p.s alors $\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_S) = M_S$.*

Démonstration. Idée de preuve : On considère

$$M_T = \sum_k \sum_l 1_{\frac{k}{2^n} \leq S < \frac{k+1}{2^n}} 1_{\frac{l}{2^n} \leq T < \frac{l+1}{2^n}} M_T$$

on approxime T et S par $\frac{l+1}{2^n}$ et $\frac{k+1}{2^n}$ respectivement.

On travaille comme en discret.

On regroupe le tout lorsque $n \to \infty$ et en utilisant la continuité de M_t. □

Exercice 8.14. Soit $a < 0 < b$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On pose $T_a = \inf\{t : B_t \leq a\}$ et $T_b = \inf\{t : B_t \geq b\}$. Ce sont des temps d'arret par la proposition 10 et $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ sont fermés.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(T_a \leq T_b) = \frac{b}{b-a}.$$
2. En utilisant que $B_t^2 - t$ est une martingale, calculer
$$\mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$$

On note $T = T_a \wedge T_b$. On a $T < \infty$ p.s

$$\mathbb{P}(\forall t : B_t \in [a,b]) \leq \mathbb{P}(B_t \in [a,b]) = \mathbb{P}(B_1 \in [\frac{a}{\sqrt{t}}, \frac{b}{\sqrt{t}}]) \to 0$$

lorsque $t \to \infty$. $(S = 0)$ On a alors

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{E}(B_T) &= \mathbb{E}(1_{T=T_a} B_T + 1_{T=T_b} B_T) \\ &= a\mathbb{P}(T_a \leq T_b) + b\mathbb{P}(T_a \geq T_b) \\ &= a\mathbb{P}(T_a \leq T_b) + b(1 - \mathbb{P}(T_a \leq T_b))\end{aligned}$$

on a alors $\mathbb{P}(T_a \leq T_b) = \frac{-b}{a-b}$.

$$0 = \mathbb{E}(B_{T\wedge t}^2 - T \wedge t)$$

donc (par convergence monotone et convergence dominé).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(B_T^2 1_{T=T_a} + B_T^2 1_{T=T_b}) \\ &= a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{-a}{b-a} \\ &= \frac{ab(a-b)}{b-a} \\ &= -ab.\end{aligned}$$

Au bout du compte on peut voir que sans trop de changements, les propriétés des martingales discrètes sont toujours valides pour les martingales continues. Cependant il manque encore le Lemme 2.9 qui est peut-être le plus important de tous. On verra qu'il va mener à la définition de l'intégrale stochastique.

9 Processus à variation finie

Il se trouve que les martingales continues ont un comportement semblable à un mouvement brownien dans la mesure où sur un intervalle de temps, elles restent à peu près à leurs place mais oscillent énormément. En calcul stochastique on décomposera des processus sous la forme

$$X_t = A_t + M_t$$

avec M une martingale continue, elle contiendra les « oscillations rapides » de X et A_t un processus plus régulier et qui reflètera la tendance moyenne du processus. On demandera en fait que A_t soit à « variation fini ».

9.1 Fonction à variation fini

Définition 9.1. Soit $a : [0,1] \to \mathbb{R}$. On dit que a est à variation fini si il existe $C > 0$, tel que pour $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$ on a

$$\sum_{i=0}^{n} |a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq C.$$

C'est équivalent à il existes μ_+ et μ_- des mesures finis sur $[0,1]$, $\mu = \mu_+ - \mu_-$ (mesure signée) tel que

$$a(t) - a(0) = \int_0^t \mu(ds) = \mu([0,t])$$

Exemple 9.2. On a que

1. Les fonctions Lipschitziennes sont à variation fini. En effet, si a est $\kappa-$lipschitzienne. Alors pour tout i $|a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq \kappa |t_{i+1} - t_i|$ et alors
$$\sum_{i=0}^{n} |a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n} \kappa |t_{i+1} - t_i| \leq \kappa.$$
2. Les fonction $C^1([0,1])$ sont à variation fini.(elles sont lipschitziennes)
3. $a(t) = \frac{1}{t}$ n'est pas à variation fini.
4. $a(t) = t\cos(\frac{1}{t})$ n'est pas à variation fini (exo).
5. Les fonctions croissantes (ou décroissantes) bornées sont à variations finis. On a directement
$$\sum_{i=0}^{n} |a(t_{i+1}) - a(t_i)| = \sum_{i=0}^{n} a(t_{i+1}) - a(t_i) = a(1) - a(0).$$

Remarque 9.3. a est à variation fini ssi il existe g croissant et f décroissant (bornés) tel que $a(t) = f(t) + g(t)$.

En posant $f(t) = \mu_-([0,t])$ et $g(t) = \mu_+([0,t])$.

Remarque 9.4. On peut choisir μ_+ et μ_- de tel sorte quelles soient à support disjoint.

On introduit $\nu = \mu_+ + \mu_-$. μ est « dominé » par ν (c'est à dire $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$). Theorème de Radon Nikodym. Il existe h fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\mu(dx) = \nu(dx)h(x)$. On peut alors choisir

$$\tilde{\mu}_+ = \nu h(x) 1_{h(x) \geq 0}$$

$$\tilde{\mu}_- = -\nu h(x) 1_{h(x) < 0}$$

on peut vérifier quelles sont à support disjoint et que $\mu = \tilde{\mu}_+ - \tilde{\mu}_-$.

Démonstration. Montrons que les deux définitions sont équivalentes :

On note $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.

Si $a(t) - a(0) = \int_0^t \mu(ds)$ alors pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ on

$$\sum_{i=0}^{n} |a(t_{i+1}) - a(t_i)| = \sum_{i=0}^{n} |\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(ds)| \leq \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\mu|(ds) = \int_0^1 |\mu|(ds) < \infty$$

Supposons que il existes $C > 0$ tel que pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ on a

$$\sum_{i=0}^{n} |a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq C$$

Construisons μ.

On peut construire

$$\tilde{\nu}([s,t]) := \sup_{s<t_1<\cdots<t_n<t} \sum_{i=0}^{n} |a(t_{i+1}) - a(t_i)|$$

ça définit bien une mesure. On vérifie que c'est cohérent. Soit $s < s' < t$. On a

$$\tilde{\nu}([s,t]) = \tilde{\nu}([s,s']) + \tilde{\nu}([s',t])$$

De plus $\tilde{\nu}$ est une mesure finie. On construit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\mu(dx) = h(x)d\tilde{\nu}(dx)$.

$$a(t_{i+1}) - a(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu = \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(s)\tilde{\nu}(ds)$$

On pose

$$h^{(n)}(s) = \sum_{i=0}^{n} 1_{s\in[t_i,t_{i+1})} \frac{a(t_{i+1}) - a(t_i)}{\tilde{\nu}([t_i, t_{i+1}))}$$

On choisit $t_i^{(n)} = \frac{i}{2^n}$. On remarque $h^{(n)}$ est une martingale sur $[0,1]$, pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma([\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}))$ pour l'espace de proba $([0,1], (\mathcal{F}_n), \tilde{\nu})$. $-1 \leq h^{(n)} \leq 1$. Alors $h^{(n)}$ converge p.s sur $[0,1]$ et dans L^1. On peut vérifier que

$$a(t) = \int_0^t h(s)\tilde{\nu}(ds)$$

En effet pour tout i, n

$$a(\frac{i}{2^n}) - a(0) = \int_0^{i2^{-n}} h^{(n)}(s)\tilde{\nu}(ds)$$

et on a alors pour tout t en prenant $n \to \infty$. □

Définition 9.5. (Intégrale) Soit a une fonction à variation fini et μ sa mesure associé. Soit f tel que $\int_0^1 |f||\mu|(ds) < \infty$. On note alors

$$\int_0^1 f(s)da(s) := \int_0^1 f(s)d\mu.$$

Proposition 9.6. *Soit f continue sur $[0,1]$, et soit $0 < t_1^{(n)} < \cdots < t_{p_n}^{(n)} < 1$ tel que $\max_{i\leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \to 0$. Alors*

$$\sum_{i=0}^{p_n} f(t_i^{(n)})(a(t_{i+1}^{(n)}) - a(t_i^{(n)})) \to \int_0^1 f(s)da(s)$$

Démonstration. On pose $f^{(n)}(t) = f(t_i^{(n)})$ pour $t_i^{(n)} \leq t < t_{i+1}^{(n)}$ c'est l'approximation de f par une fonction constante par morceau (sur les $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$).

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p_n} f(t_i^{(n)})(a(t_{i+1}^{(n)}) - a(t_i^{(n)})) &= \sum_{i=0}^{p_n} f(t_i^{(n)}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\mu \\ &= \sum_{i=0}^{p_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^{(n)}(s)d\mu(s) \\ &= \int_0^1 f^{(n)}(s)d\mu(s).\end{aligned}$$

Puisque $\max_{i\leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \to 0$ et f est continue on a $f^{(n)} \to f$ sur $[0,1]$. Par convergence dominé (f est continue donc bornée)

$$\int_0^1 f^{(n)}(s)d\mu(s) \to \int_0^1 f(s)\mu(ds) = \int_0^1 f(s)da(s).$$

□

Définition 9.7. Soit f tel que $\int_0^1 |f||\mu|(ds) < \infty$ alors

$$b(t) := \int_0^t f(s)\mu(ds)$$

est à variation fini.

Démonstration. La mesure $f(x)\mu(dx)$ est fini. □

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, la définition « à variation fini » et les propriétés associés de généralisent de manière élémentaire aux fontions définies sur $[0,t]$. On dira également qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ est à variation fini si pour tout $t \geq 0$, cette fonction restreinte à $[0,t]$ est à variation finie.

9.2 L'intégrale de Stieljes (discussion)

Avec $y_i^{(n)} \in [t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$.

$$\sum_{i=0}^{p_n} f(y_i^{(n)})(a(t_{i+1}^{(n)}) - a(t_i^{(n)})) \to ? = \int_0^1 f(s)da(s)$$

Ce que l'on vient de voir : OK si f continue et a à variation fini.

Question : Pour quel conditions a t on que la limite est bien définie ?

Une condition possible c'est f est p-Holder et a est q-Holder avec $p \geq 1/2$ et $q \geq 1/2$.

9.3 Processus à variation

Définition 9.8. On dit que A est un processus à variation fini si pour tout $\omega \in \Omega$, $t \to A_t(\omega)$ est une fonction à variation fini.

Contre exemple : Le mouvement brownien n'est PAS à variation fini. On verra pourquoi dans la suite.

10 Variation quadratique des martingales continues

Dans toute cette partie et dans la suite du cours, pour tout martingale M on supposera que$\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour $t \geq 0$. Une martingale continue oscille beaucoup, de fait la variation absolu de la partie précédente n'est pas adaptée pour appréender les fluctuations de M. Le bon objet sera la variation quadratique :

$$\sup_{(t_t)} \sum_i (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

On verra que ceci converge vers un processus $\langle M, M\rangle$ qui décrit alors l'intensité des fluctuations M .Comme pour le mouvement brownien on peut penser une martingale continue comme, dans une certaine limite, une somme d'un grand nombre de petite variables aléatoire de moyenne (conditionnelle) nulle. A la limite , les particularités de ces variables s'effacent et in fine, seules leur variance compte. La «variation quadratique» $\langle M, M\rangle_t$ de la martingale peut être vu comme le processus aléatoire décrivant la variance de ces petites variables. De manière informelle on a $\langle M, M\rangle_{t+dt} - \langle M, M\rangle_t = \mathbb{E}((M_{t+dt} - M_t)^2|\mathcal{F}_t)$.

De fait la variation quadratique apparait naturellement pour les martingales continues comme on peut le voir dans la simple proposition suivante.

Proposition 10.1. *Soit M_t une martingale continue telle que $t \geq 0$ $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ alors*

1. *Pour tout $s < t$ on a $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s)$,*

2. *Pour tout* $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ *on a* $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2|\mathcal{F}_s)$,

En particulier $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2) = \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2)$.

Démonstration. On écrit $M_t = (M_t - M_s) + M_s$ et donc .

$$\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 + 2M_s(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s)$$

On a aussi

$$\mathbb{E}(M_s(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) = M_s\mathbb{E}(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) = M_s(\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) - M_s) = 0$$

car $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}(M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1}M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_{t_i}^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s).
\end{aligned}$$

□

J'ai plusieurs fois répété qu'une martingale continue oscille beaucoup. C'est ce que dit le lemme suivant : sauf cas trivial, une martingale continue n'est pas à variation fini.

Lemme 10.2. *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue avec* $M_0 = 0$ *tel que* $\forall t$ $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$, *à variation finie alors*

$$M_t = 0$$

p.s pour tout t.

Démonstration. Supposons M_t soit « uniformément à variation finie ». Il existe C p.s pour tout $\omega \in \Omega$ la variation de $M_t(\omega)$ est borné par C. Pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t^2) &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2) \\
&\leq \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{i\leq n}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|.|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|) \\
&= \mathbb{E}(\sup_{i\leq n}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|.\sum_{i=0}^{n-1}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|) \\
&\leq C\mathbb{E}(\sup_{i\leq n}|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|)
\end{aligned}$$

Puisque M_t est continue $\mathbb{E}(\sup_{i\leq n}|M_{t_{i+1}}-M_{t_i}|)\to 0$ pour $\max|t_{i+1}-t_i|\to 0$. Conclusion $\mathbb{E}(M_t^2)=0$ c'est à dire $M_t=0$ p.s.

Pour le cas générale on pose $T_k := \inf\{t : \sup_{t_i}\sum|M_{t_{i+1}}-M_{t_i}|\geq k\}$. Alors la variation de $M_{t\wedge T_k}$ est uniformément borné par k. Donc $M_{t\wedge T_k}=0$. Pour finir $T_k\to\infty$ lorsque $k\to\infty$ p.s car M est à variation fini. Alors $0=M_{t\wedge T_k}\to M_t$. □

Définition 10.3. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue avec $\forall t\ \mathbb{E}(M_t^2)<\infty$. On appelle *variation quadratique* $\langle M,M\rangle_t$ l'unique processus (issu de 0) à variation finie tel que

$$M_t^2-\langle M,M\rangle_t$$

soit une martingale.

Exemple On a vu que B_t^2-t est une martingale donc si M est le mouvement brownien alors $\langle M,M\rangle_t=t$.

Démonstration. L'unicité : Supposons M_t uniformément borné. Soit $\langle M,M\rangle_t^{(1)}$ et $\langle M,M\rangle_t^{(2)}$ deux processus à variation fini tel que $M_t^2-\langle M,M\rangle_t^{(1)}$ et $M_t^2-\langle M,M\rangle_t^{(2)}$ soient des martingales. Alors

$$M_t^2-\langle M,M\rangle_t^{(1)}-M_t^2+\langle M,M\rangle_t^{(2)}=\langle M,M\rangle_t^{(2)}-\langle M,M\rangle_t^{(1)}$$

Le terme de droite est une martingale, le terme de gauche est à variation fini donc c'est une martingales continue à variation fini donc $\langle M,M\rangle_t^{(2)}-\langle M,M\rangle_t^{(1)}=0$. Pour le cas général on pose $T_C := \inf\{t : M_t > C\}$. Alors le résultat est vrai pour $M_{t\wedge T_C}$ et on l'étend à M_t en passant à la limite $C\to\infty$ □

Proposition 10.4. *Pour* $0<t_1<\cdots<t_n<t$ *on a*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\to\langle M,M\rangle_t$$

en proba lorsque $\max|t_{i+1}-t_i|\to 0$.

$$2\sum_{i=0}^{n-1}M_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})\to M_t^2-\langle M,M\rangle_t$$

en proba lorsque $\max|t_{i+1}-t_i|\to 0$.

Démonstration. Idée de la preuve

$$M_t^2-M_s^2=2M_s(M_t-M_s)+(M_t-M_s)^2$$

Par itération immédiate on obtient

$$M_t^2=2\sum_{t_i<t}M_{t_i}(M_{t_i}-M_{t_{i+1}})+\sum(M_{t_i}-M_{t_{i+1}})^2$$

On pose

$$X_s^{(n)} = 2\sum M_{t_i}(M_{t_i\wedge s} - M_{t_{i+1}\wedge s})$$

$$Z_s^{(n)} = \sum (M_{t_i\wedge s} - M_{t_{i+1}\wedge s})^2.$$

Observer alors que

1. $X_s^{(n)}$ est une martingale.
2. $i \to Z_{t_i}^{(n)}$ est croissante donc à variation finie.

Proposition 10.5. *X_s et Z_s converge en probabilité.*

□

Définition 10.6. (Crochet de Martingale continue)

Soit M et N deux martingales continues bornées dans L^2. On note $\langle M, N\rangle_t$ l'unique fonction à variation finie tel que

$$M_t N_t - \langle M, N\rangle_t$$

est une martingale.

Remarque 10.7. $2\langle M, N\rangle_t = \langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M, M\rangle_t - \langle N, N\rangle_t$.

Proposition 10.8. *Pour* $0 < t_1 < \cdots < t_n < t$ *on a*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \to \langle M, N\rangle_t$$

en proba lorsque $\max |t_{i+1} - t_i| \to 0$.

Définition 10.9. On dit que X_t est une semimartingale continue ssi il existe M_t une martingale et A_t un processus à variation fini (adapté), issu de 0 tel que

$$X_t = M_t + A_t$$

Remarque 10.10. C'est décomposition est unique.

11 Intégrale Stochastique

On rappel que pour une martingale discrète $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus prévisible c'est à dire $(\mathcal{F}_{n-1})$. Alors

$$(H\cdot M)_n := \sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1}).$$

est une martingale.

On aimerait avoir un Lemme semblable pour M_t une martingale continue et soit H_t un processus adapté. Le but est de définir

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s = ?$$

que l'on appellera Intégrale Stochastique. Un point essentielle sera de traduire la notion de «prévisible» dans le cas continue. Remarquer aussi M_t n'est pas à variation fini et donc la définition de l'intégrale au sens des variations finies ne peut pas être utilisé ici. Il s'agit donc de définir une nouvelle notion d'intégrale, adaptée aux martingales continues.

Définition 11.1. Soit M_t une martingale continue et H_t un processus adapté p.s constant par morceau. C'est à dire qu'il existe $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ et $(H_i)_{i \leq n-1}$ des variables respectivement $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurables tel que

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

pour tout $\omega \in \Omega$. On définit alors

$$(H \cdot M)_t := \sum_i H_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

Démonstration. Vérifions que $(H \cdot M)_t$ est bien une martingale. Tout d'abord pour $s \in (t_i, t_{i+1})$ H_s est $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable. Ensuite puisque la somme de martingale est encore une martingale il suffit de montrer que $H_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$ est une martingale. et

$$(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_i \\ (M_t - M_{t_i}) & \text{si } t_i < t < t_{i+1} \\ M_{t_{i+1}} - M_{t_i} & \text{si } t \geq t_{i+1} \end{cases}$$

Soit $s < t$. Montrons que $\mathbb{E}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} | \mathcal{F}_s) = M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}$. Si $t < t_i$ alors on immédiatement $H_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) = 0$ et $H_i(M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}) = 0$. Si $t_i \leq s < t \leq t_{i+1}$ alors

$$\mathbb{E}(H_i(M_t - M_{t_i}) | \mathcal{F}_s) = H_i(\mathbb{E}(M_t) | \mathcal{F}_s) - M_{t_i}) = H_i(M_s - M_{t_i}).$$

Si $t_{i+1} \leq s < t$, $M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} = H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) = M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}$ et les autres cas sont triviaux. On a donc bien une martingale. □

Dans la suite on supposera toujours $M_0 = 0$.

Proposition 11.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et une filtration $\mathcal{F}_t$. On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des martingales continues uniformément borné dans L^2. Alors $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\mathbb{E}(M_\infty N_\infty)$$

où M_∞, N_∞ est la limite dans L^2 et p.s de M_t et N_t.

On note $\mathcal{F}_\infty = \sigma((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ On a toujours pour les martingales continues uniformément borné dans L^2 $M_t = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_t)$

En particulier $\|M\|^2 = \mathbb{E}(M_\infty^2) = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty)$. Où $\langle M, M\rangle_\infty$ est la limite de $\langle M, M\rangle_t$ pour $t \to \infty$.

En effet $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale donc pour tout t, $\mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t) = 0$ On peut conclure par convergence L^2 de la martingale et par convergence monotone de $\langle M, M\rangle_t$.

De même on a

$$\mathbb{E}(M_\infty N_\infty) = \mathbb{E}(\langle M, N\rangle_\infty)$$

où $\langle M, N\rangle_\infty$ est la limite de $\langle M, N\rangle_t$.

Définition 11.3. Soit M une martingale continue : on note $L^2(M)$ l'ensemble des processus H_t adaptés tel que

$$\mathbb{E}(\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M\rangle_t) < \infty$$

(ici c'est l'intégrale à variation fini car $\langle M, M\rangle_t$ est à variation fini). Et on note $\mathcal{E}(M) \subset L^2(M)$ le sous ensembles des processus constant par morceaux.

On munit $L^2(M)$ du produit scalaire

$$\mathbb{E}(\int_0^\infty H_t K_t d\langle M, M\rangle_t)$$

et donc de la norme

$$\|H\|_{L^2(M)} = \mathbb{E}(\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M\rangle_t)$$

Proposition 11.4. *On a*

1. *$\mathcal{E}(M)$ est dense dans $L^2(M)$*
2. *L'application $\mathcal{E}(M) \to \mathbb{H}$ définit par $H \to (H \cdot M)$ est une isométrie.*

Théorème 11.5. *(Définition de l'intégrale stochastique). Il existe une unique isométrie de $L^2(M) \to \mathbb{H}$ qui étend $H \to (H \cdot M)$ définit sur $\mathcal{E}(M) \to \mathbb{H}$.*

Preuve de la proposition 11.4. Puisqu'il s'agit d'un espace de Hilbert $\mathcal{E}(M)$ est dense dans $L^2(M)$ est équivalent à $\mathcal{E}(M)^\perp = \{0\}$. Soit $H \in \mathcal{E}(M)^\perp$. On pose

$$X_t = \int_0^t H_s \langle M, M\rangle_s$$

Puisque

$$\mathbb{E}(\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M\rangle_t) < \infty$$

on a presque surement $\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M\rangle_t < \infty$. En particulier $\int_0^t |H_s|\langle M, M\rangle_s < \infty$ pour tout t. On en déduit que X_t est à variation fini sur $[0, T]$.

$$\sum |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| = \sum |\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \langle M, M\rangle_s| \leq \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} |H_s| \langle M, M\rangle_s = \int_0^T |H_s| \langle M, M\rangle_s < \infty.$$

Montrons que X_t est une martingale c'est à dire que $\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0$.

$$X_t - X_s = \int_s^t H_u \langle M, M\rangle_u = \int_0^\infty K_u H_u \langle M, M\rangle_u$$

ou on a pose $K_u = 1_{(s,t)}(u)$. Soit F une fonction $\mathcal{F}_s$ mesurable alors $FK \in \mathcal{E}(M)$ Donc

$$\mathbb{E}(\int_0^\infty F K_u H_u d\langle M, M\rangle_u) = 0 = \mathbb{E}(F(X_t - X_s))$$

Conclusion pour toute fonction F $\mathcal{F}_s$ mesurable $0 = \mathbb{E}(F(X_t - X_s))$ on en déduit que $\mathbb{E}((X_t - X_s)|\mathcal{F}_s) = 0$. Donc X_t est une martingale c'est donc une martingale continue et à variation fini. On en déduit que $X_t = 0$. Et alors $H_s = 0$ μ presque surement où μ est la mesure associé à la fonction à variation fini $\langle M, M\rangle_s$. Donc $H = 0$ dans "$L^2(M)$".

Montrons maintenant $(H \to (H \cdot M)$ définie par

$$(H \cdot M)_t = \sum_i H_i (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

est une isométrie de $L^2(M)$ dans $\mathbb{H}$.

-c'est bien une application linéaire.

-$(H \cdot M)$ est bien une martingale.

-Elle préserve la distance :

$$\begin{aligned}
\|(H \cdot M)\|^2_{\mathbb{H}} = \mathbb{E}((H \cdot M)^2_\infty) &= \mathbb{E}(\sum_i H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}))^2 \\
&= \sum_i \sum_j \mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})) \\
&= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2) + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}))
\end{aligned}$$

puisque $M_{t_{i+1}}, M_{t_i}$, H_i et H_j sont $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurable

$$\mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})) = \mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\mathbb{E}((M_{t_{j+1}} - M_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j})) = 0$$

car M est une martingale. On a donc

$$\begin{aligned}
\|(H\cdot M)\|_{\mathbb{H}}^2 &= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2)\\
&= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2(M_{t_{i+1}}^2-M_{t_i}^2))\\
&= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2(\langle M,M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M,M\rangle_{t_i}))\\
&= \sum_i \mathbb{E}(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_i^2 d\langle M,M\rangle_t)\\
&= \mathbb{E}(\int_0^{\infty} H_t^2 d\langle M,M\rangle_t)\\
&= \|H\|_{L^2(M)}
\end{aligned}$$

En effet $M_t^2-\langle M,M\rangle_t$ est une martingale donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_i^2(M_{t_{i+1}}^2-M_{t_i}^2) &= \mathbb{E}(H_i^2\mathbb{E}(M_{t_{i+1}}^2-M_{t_i}^2|\mathcal{F}_{t_i})\\
&= \mathbb{E}(H_i^2\mathbb{E}(\langle M,M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M,M\rangle_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i})\\
&= \mathbb{E}(H_i^2(\langle M,M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M,M\rangle_{t_i}))
\end{aligned}$$

et finalement $H\to H\cdot M$ est bien une isométrie de $\mathcal{E}(M)$ et $\mathbb{H}$. □

Proposition 11.6. *Soit $M,N\in\mathbb{H}$ et soit $H\in L^2(M)$ alors*

$$\langle (H\cdot M),N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M,N\rangle_s = H\cdot\langle M,N\rangle_s$$

Remarquer ici que l'intégrale et le « $\cdot$ » de droite est au sens de la variation finie . Alors que le « $\cdot$ » de gauche est une intégrale stochastique.Remarquer également que cette propriété est élémentaire pour des martingales discrètes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\le n}((H\cdot M)_i-(H\cdot M)_{i-1})(N_i-N_{i-1}) &= \sum_{i\le n} H_i(M_i-M_{i-1})(N_i-N_{i-1})\\
&= H\cdot\langle M,N\rangle_n
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour $H=H_i1_{(t_i,t_{i+1})}$ avec H_i $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable.

$$(H\cdot M)_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t<t_i\\ H_i(M_t-M_{t_i}) & \text{si } t_i<t<t_{i+1}\\ H_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i}) & \text{si } t\ge t_{i+1}\end{cases}$$

donc

$$\langle (H\cdot M),N\rangle_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t<t_i\\ H_i\langle M,N\rangle_t-\langle M,N\rangle_{t_i}) & \text{si } t_i<t<t_{i+1}\\ H_i\langle M,N\rangle_{t_{i+1}}-\langle M,N\rangle_{t_i}) & \text{si } t\ge t_{i+1}\end{cases}$$

soit

$$\langle (H\cdot M),N\rangle_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_i \\ \int_{t_i}^t H_i d\langle M,N\rangle_s & \text{si } t_i < t < t_{i+1} \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_i d\langle M,N\rangle_s & \text{si } t \geq t_{i+1} \end{cases} = \int_0^t H d\langle M,N\rangle_s$$

Par linéarité on a donc la proposition pour les fonctions constantes par morceaux ($H \in \mathcal{E}(M)$).

Par continuité on étend la proposition à tous les $H \in L^2(M)$. $\square$

Proposition 11.7. *(associativité) Soit $M \in \mathbb{H}$, K dans $L^2(M)$ et $H \in L^2(K\cdot M)$ alors $HK \in L^2(M)$ et*

$$(H\cdot (K\cdot M)) = (HK)\cdot M$$

12 Formule d'Ito

La formule d'Ito est l'outil de base du calcul stochastique. C'est l'équivalent du principe fondamental de l'analyse pour les processus stochastiques. Elle indispensable, utilisée tout le temps et partout. Le point essentiel est qu'il faut rajouter à l'intégrale un terme qui dépend de la variation quadratique.

12.1 La formule d'Ito, enoncé et exemples simples.

Théorème 12.1. *(Formule d'Ito : En dimension 1)Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s$$

Théorème 12.2. *(En dimension d)Soit $(X_t^{(1)},\cdots,X_t^{(d)})_{t\geq 0}$ une semimartingale et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$f((X_t^{(1)},\cdots,X_t^{(d)})$$
$$= f((X_0^{(1)},\cdots,X_0^{(d)}) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(X_s)d\langle X^{(k)},X^{(l)}\rangle_s.$$

Exemple 12.3. Appliquons la formule d'Ito sur des cas simple :

1. Considérons $(B_t^2)_{t\geq 0}$. Ici $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$ et la variation quadratique $\langle B,B\rangle_s = s$ (ce qui donne $d\langle B,B\rangle_s = ds$)

$$B_t^2 = 0 + \int_0^t 2B_t dB_t + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds = 2\int_0^t B_t dB_t + t$$

Remarquer que l'on retrouve bien le fait que $B_t^2 - t$ est une martingale.

2. Considérons $(B_t^3)_{t\geq 0}$. Ici $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$ et toujours $\langle B,B\rangle_s = s$. On a donc

$$B_t^3 = 0 + 3\int_0^t B_s^2 dB_s + 3\int_0^t B_s ds$$

Lemme 12.4. *si*

$$X_t = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t P_s dA_s$$

alors « $dX_t = H_s dM_s + P_s dA_s$ » et « $d\langle X,X\rangle_s = H_s^2 d\langle M,M\rangle_s$ ».

Démonstration. En effet pour tout K processus adapté on a

$$\int_0^t K_s dX_s = (K\cdot X)_t = (K\cdot(H\cdot M))_t = ((KH)\cdot M)_t = \int_0^t K_s H_s dM_s$$

et même chose pour $P_s dA_s$. On a également

$$\langle (H\cdot M),(H\cdot M)\rangle_t = H^2\cdot\langle M,M\rangle_t$$

□

Exemple 12.5. Considérons B_t^4 et appliquons la formule d'Ito de deux manière différente soit $X_t = B_t$ et $f(x)=x^4$ soit $X_t = B_t^2$ et $f(x)=x^2$. Pour le deuxième cas $X_t = 2\int_0^t B_t dB_t + t$ donc par le Lemme précédent on a $dX_s = 2B_s dB_s + ds$ et $d\langle X,X\rangle_s = 4B_s^2 ds$. Avec $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$ on obtient

$$(B_t^2)^2 = 0+\int_0^t 2B_s^2\times 2B_s dB_s + \int_0^t 2B_s^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t 2\times 4B_s^2 ds = 4\int_0^t B_s^3 dB_s + 6\int_0^t B_s^2 ds$$

Dans le deuxième cas avec $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$ et $f''(x)=12x^2$ on a directement

$$B_t^4 = 4\int_0^t B_s^3 dB_s + 6\int_0^t B_s^2 ds$$

Passons à la preuve de la formule d'Ito. Voici l'idée générale, on peut considérer l'exemple simple $(M_t)^2$. Par définition de l'intégrale stochastique $(M\cdot M) = \int M_t dM_t$ est une martingale alors M_t^2 est une sousmartingale. La formule naive $M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_s dM_s$ est donc fausse ! En fait on a construit la variation quadratique $\langle M,M\rangle$ exactement de tel sorte que l'on ait $M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M,M\rangle_t$ ou plus généralement $M_t^2 = M_s^2 + 2\int_s^t M_u dM_u + \langle M,M\rangle_t - \langle M,M\rangle_s$. C'est En considérant une fonction quelconque f, si f est $\mathcal{C}^2$ alors localement on peut toujours écrire $f(x)\approx ax^2+bx+c$. C'est ce qui va donner en fin de compte la formule d'Ito.

Démonstration. Pour le cas $d = 1$.Pour tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p_n} = t$ on a

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{p_n} f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}})$$

Puisque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, par développement de Taylor (exact) on a pour tout x, y, il exists $x^* \in [x, y]$ tel que :

$$f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + \frac{1}{2}(y - x)^2 f''(x^*)$$

Donc il existe des $Y_i^* \in [X_{t_{i-1}}, X_{t_i}]$ tel que

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i \left((X_{t_i} - X_{t_{i-1}})f'(X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 f''(Y_i) \right) \quad (5)$$

Lorsque on choisit des segmentations de plus en plus petite $H_{t_{i-1}} = f'(X_{t_{i-1}})$

$$\sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})f'(X_{t_{i-1}}) \to \int_0^t f'(X_s)dX_s.$$

Il reste le deuxième terme. Il faut montrer que

$$\frac{1}{2}\sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 f''(Y_i) \to \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s. \quad (6)$$

Par construction de $\langle X, X\rangle$ pour toute fonction plateau $1_{t\in[a,b]}$ on a la convergence en proba

$$\frac{1}{2}\sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 1_{t_{i-1}\in[a,b]} \to \frac{1}{2}\int_a^b d\langle X, X\rangle_s.$$

On pourrait alors obtenir (6) en utilisant

1. la densité de l'espace vectoriel des fonctions plateaux.
2. $|f''(Y_i) - f''(X_{t_{i-1}})| \to 0$ car f'' est continue.

On peut alors conclure : equation (5) donne

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i (\cdots) \to \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

□

Il existe également une formule d'intégration par partie pour l'intégrale stochastique. Sans surprise, il faut ajouter un terme utisant la variation quadratique, (ici un crochet de martingale).

Proposition 12.6. *"Intégration par partie" Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux semi-martingales continues*

$$\int_0^t X_s dY_s = (X_tY_t - X_0Y_0) - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y\rangle_t$$

On peut comparer cette formule à l'intégration par partie en « analyse réelle». Pour $f, g \in \mathcal{C}^1$ on a

$$\int_0^y f'(x)g(x)dx = [f(y)g(y) - f(0)g(0)] - \int_0^y f(x)g'(x)dx$$

On peut écrire "$df(x) = f'(x)dx$" et "$dg(x) = g'(x)dx$". On remarque qu'il s'agit donc bien de la même formule mais auquel on a ajouté le crochet de martingale.

Démonstration. On pose $f(x, y) = xy$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$. D'après la formule d'Ito (en dimension 2) on a

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t 1 \times d\langle X, Y\rangle_s + + \frac{1}{2}\int_0^t 1 \times d\langle Y, X\rangle_s$$

soit

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \langle X, Y\rangle_t$$

Conclusion

$$\int_0^t X_s dY_s = (X_tY_t - X_0Y_0) - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y\rangle_t$$

□

12.2 Applications de la formule d'Ito

On énonce ici quelques conséquences de la formule d'Ito.

Pour B_t un mouvement brownien et $\mu \in \mathbb{R}$ on avait vu que $\exp(\mu B_t - \frac{\mu^2}{2}t)$ est une martingale continue. Ce qui suit en est une généralisation pour les martingales continue

Lemme 12.7. *Soit M_t une martingale continue et $\mu \in \mathbb{R}$ alors*

$$\mathcal{E}(\mu M_t) := \exp(\mu M_t - \frac{\mu^2}{2}\langle M, M\rangle_t)$$

est une martingale. (sous les conditions d'intégrabilité.)

Démonstration. Soit $f(x,y) = \exp(\mu x - \frac{\mu^2}{2} y)$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mu f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\mu^2}{2} f(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \mu^2 f(x,y)$. Il est inutile de calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ car $\langle\langle M,M\rangle, \langle M,M\rangle\rangle_t = 0$, et $\langle M, \langle M,M\rangle\rangle_t = 0$. D'après la formule d'Ito avec $X_t = M_t$ et $Y_t = \langle M,M\rangle_t$:

$$\begin{aligned}\exp(\mu M_t - \frac{\mu^2}{2}\langle M,M\rangle_t) = \exp(\mu M_0) + \int_0^t \mu \mathcal{E}(\mu M_s) dM_s \\ - \int_0^t \frac{\mu^2}{2} \mathcal{E}(\mu M_s) d\langle M,M\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mu^2 \mathcal{E}(\mu M_s) d\langle M,M\rangle_s\end{aligned}$$

Conclusion

$$\exp(\mu M_t - \frac{\mu^2}{2}\langle M,M\rangle_t) = \exp(\mu M_0) + \int_0^t \mu \mathcal{E}(\mu M_s) dM_s$$

C'est donc une martingale car M_t est une martingale et la définition de l'intégrale d'Ito pour les martingales. Plus généralement si f satisfait

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

alors $f(M_t, \langle M,M\rangle_t)$ est une martingale. □

Théorème 12.8. *(Levy) Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue avec $M_0 = 0$. Alors*

$$M \textit{ est un mouvement brownien } \Leftrightarrow \langle M,M\rangle_t = t$$

(En dimension d) Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue dans $\mathbb{R}^d$ avec $M_0 = 0$. Alors

$$M \textit{ est un mouvement brownien } \Leftrightarrow \langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_t = \begin{cases} t & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue avec $M_0 = 0$ tel que $\langle M,M\rangle_t = t$. Comme échauffement, montrons que M_t est une gaussienne de variance t. On calcule (la transformé de Laplace)

$$\mathbb{E}(e^{\mu M_t}) = \mathbb{E}(e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2}t})e^{\frac{\mu^2}{2}t} = \mathbb{E}(e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2}\langle M,M\rangle_t})e^{\frac{\mu^2}{2}t}$$

Par le Lemme précédent on a $e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2}\langle M,M\rangle_t}$ est une martingale et donc

$$\mathbb{E}(e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2}\langle M,M\rangle_t}) = \mathbb{E}(e^{\mu M_0}) = 1.$$

On a alors bien que $\mathbb{E}(e^{\mu M_t}) = e^{\frac{\mu^2}{2}t}$ qui est la même chose que pour une gaussienne de variance t.

Montrons que M_t est un mouvement brownien. Tout d'abords trivialement on a que M_t est continue. Ensuite soit $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, montrons que $M_{t_i} - M_{t_{i-1}}$ sont des gaussiennes indépendantes. On calcule

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \cdots + \mu_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}})}) \\
&\quad = \mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \cdots + \mu_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}}) - \frac{\mu^2}{2} t_n - t_{n-1}}) e^{\frac{\mu^2}{2} t_n - t_{n-1}} \\
&\quad = \mathbb{E}(\mathbb{E}(-|\mathcal{F}_{t_{n-1}})) e^{\frac{\mu^2}{2} t_n - t_{n-1}} \\
&\quad = \mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \cdots + \mu_{n-1} (M_{t_{n-1}} - M_{t_{n-2}})}) e^{\frac{\mu_n^2}{2} t_n - t_{n-1}}
\end{aligned}$$

car $e^{\mu_n M_t - \frac{\mu_n^2}{2} \langle M, M \rangle_t}$ est une martingale. Par direct itération on obtient :

$$\mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \cdots + \mu_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}})}) = \prod e^{\frac{\mu_i^2}{2} t_i - t_{i-1}} = \prod \mathbb{E}(e^{\mu_i (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})}).$$

On obtient alors un produit et cela est vrai pour tout $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Donc les incréments sont indépendant. De plus ce sont bien tous des gaussiennes de variance respectivement $t_i - t_{i-1}$. □

Remarque 12.9. On peut comparer ce résultat au théorème centrale limite pour les martingales discrètes. L'hypothèse$\langle M, M \rangle_t = t$ remplace ici $\frac{1}{n} \sum \mathbb{E}((M_i - M_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma^2$ et on obtient alors également une gaussienne à la limite.

Théorème 12.10. *Soit M_t une martingale continue $M_0 = 0$ et $\langle M, M \rangle_t \to \infty$ p.s Alors il existe un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ tel que*

$$M_t = B_{\langle M, M \rangle_t}$$

Théorème 12.11. *Soit B_t un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t$ la filtration canonique associée à B. Soit Z $\mathcal{F}_\infty$-mesurable borné dans L^2. Alors il existe un unique processus adapté H tel que*

$$Z = \mathbb{E}(Z) + \int_0^\infty H_s dB_s.$$

Démonstration. Idée : $Z_t := \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_t)$. On a

$$Z_t = \mathbb{E}(Z) + \int_0^t H_s dB_s$$

□

13 Equation differentielle stochastique

13.1 Equation differentielle stochastique

Lorsque l'on parle d'équation différentielle au sens usuelle on pense en générale à une fonction y fonction $\mathcal{C}^1$ satisfaisant

$$\frac{dy}{dt}(t) = b(t, y(t))$$

équation que l'on peut également écrire comme $dy = b(t, y(t))dt$ ou sous forme intégrale $y(t) = y(0) + \int_0^t b(s, y(s))ds$.

Une équation différentielles stochastiques (EDS) est formellement la même chose sauf que l'on considère y une semimartingale et que l'on ajoute un terme de « bruit blanc », formellement la dérivé du brownien

$$dy = b(t, y(t))dt + \sigma(t, y(t))dB_t$$

où il faut comprendre cette équation avec la forme intégrale $y(t) = y(0) + \int_0^t b(s, y(s))ds + \int_0^t \sigma(s, y(s))dB_s$ où le dernier terme est l'équation stochastique. Plus formellement une EDS c'est :

Définition 13.1. Soit $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times m}$. On note $E(b, \sigma)$ l'équation differentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t.$$

Une solution d'une équation différentielle stochastique consiste en
— Un espace de probabilité avec une filtration $\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mu$
— Un mouvement brownien (B_t) adapté de dimension m $(B_t \in \mathbb{R}^m)$
— y une semimartingale sur $\mathbb{R}^d$ qui satisfait

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

On peut aussi imposer une condition initial $X_0 = x$.

Puisque la solution est un processus aléatoire il convient de rappeler qu'en probabilité il peut y avoir plusieurs sens à l'égalité : égalité en loi / égalité p.s. On aura donc aussi plusieurs sens quand on parle d'unicité de la solution :

Définition 13.2. (Unicité)
— On dira qu'il y a *unicité faible* si pour tout X^1 et X^2 solution de $E(b, \sigma)$, X^1 et X^2 ont même loi.
— On dira qu'il y a *unicité trajectorielle* si pour tout X^1 et X^2 solution de $E(b, \sigma)$ ayant le même espace de proba et le même mouvement brownien alors $X_t^1 = X_t^2$ presque surement pour tout t.

Il se trouve que unicité trajectorielle $\Rightarrow$ unicité en loi. Mais l'autre sens n'est pas vrai comme on peut le voir dans l'exemple ci dessous

Exemple 13.3. Soit β_t un mouvement brownien on pose

$$B_t = \int_0^t \text{signe}(\beta_s)d\beta_s$$

où signe(β_t) $= 1$ is $\beta_t \geq 0$ et signe(β_t) $= -1$ si $\beta_t < 0$. Ici

$$\langle B, B \rangle_t = \int_0^t \text{signe}(\beta_s)^2 d\langle \beta, \beta \rangle_s = \int_0^t 1 ds = t$$

Par théorème de Levy B est un mouvement brownien. Considérons maintenant l'EDS

$$dX_t = \text{signe}(X_t) dB_t$$

Quel que soit la solution à cette équation on montre par le même argument que c'est un mouvement brownien. On a donc l'unicité faible. Cependant on peut remarquer queβ_t et $-\beta_t$ sont solution de cette équation stochastique. En effet $dB_t = \text{signe}(\beta_s) d\beta_s$ et donc $\text{signe}(\beta_s) dB_t = d\beta_s$. De même on a $\text{signe}(-\beta_s) dB_t = -d\beta_s$. Il n'y a donc pas unicité trajectorielle.

13.2 Cas Lipschitzien

Dans cette partie on montre l'existence et l'unicité trajectoriellle sous des hypothèses Lipschitziens :

On supposera qu'il existe $K > 0$ tel que

— $|b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|$ pour tout $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$

— $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$ pour tout $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$

— $b(t,x) \leq K(1+|x|)$ $\sigma(t,x) \leq K(1+|x|)$ pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$

Théorème 13.4. *Sous hypothèse Lipschitzienne on a existence et unicité trajectorielle de $E(b,\sigma)$.*

Dans la suite on supposera $d = 1$, mais la preuve fonctionne également dans le cas $d \geq 1$. On se restreint à l'intervalle $t \in [0,1]$. Si pour chaque intervale $[n, n+1]$ on montre l'existence et l'unicité trajectorielle, on pourra ensuite coller les solutions après les autres pour obtenir l'existence et l'unicité sur l'intervale $[0, \infty)$.

13.2.1 Preuve de l'unicité

Soit X^1 et X^2 solution $E(b,\sigma)$. Calculons $\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2)$. Puisqu'ils sont solution de E on a

$$\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) = \mathbb{E}((\int_0^t b(t, X_s^1) - b(t, X_s^2)|ds + \int_0^t \sigma(t, X_s^1) - \sigma(t, X_s^2) dBs)^2)$$

en développant le carré on obtient

$$\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) \leq 2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t b(t, X_s^1) - b(t, X_s^2) ds\right)^2\right) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \sigma(t, X_s^1) - \sigma(t, X_s^2) dBs\right)\right)$$

On rappelle que

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \sigma(t,X_s^1)-\sigma(t,X_s^2)dBs\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t (\sigma(t,X^1)-\sigma(t,X_s^2))^2 ds\right)$$
$$\leq K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_s^1 - X_s^2|^2)ds$$

Par Cauchy Swartz

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t b(t,X_s^1)-b(t,X_s^2)ds\right)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t |b(t,X_s^1)-b(t,X_s^2)|^2 ds\right)$$
$$\leq K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_s^1 - X_s^2|^2)ds$$

Finallement

$$\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) \leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_s^1 - X_s^2|^2)ds$$

Lemme 13.5. *(Gronwall) Soit h une fonction borné dans* $[0,1]$

$$h(t) \leq a + b\int_0^t h(s)ds$$

alors

$$h(t) \leq ae^{bt}.$$

Démonstration. Puisque $h(s) \leq a + b\int_0^s h(u)du$

$$h(t) \leq a + b\int_0^t h(s)ds \leq a + tba + b^2 \int_0^t ds \int_0^s h(u)du$$

En itérant la formule n fois on obtient

$$h(t) \leq a + tba + \frac{1}{2}at^2b^2 + \cdots + \frac{1}{n!}at^nb^n + \int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^{s_n} h(u)ds_1 ds_2 \cdots$$

Le dernière terme converge vers 0 pour $n \to \infty$ et finalement $h(t) \leq ae^{bt}$. $\square$

Pour utiliser Gronwall, il faut que l'on ait une fonction bornée. On pose alors $T = \inf\{X_t^1 > C, X_t^2 > C\}$ on a

$$\mathbb{E}(|X_{t\wedge T}^1 - X_{t\wedge T}^2|^2) \leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_{s\wedge T}^1 - X_{s\wedge T}^2|^2)ds$$

Par Gronwall avec $a = 0$ on a finallement $\mathbb{E}(|X_{t\wedge T}^1 - X_{t\wedge T}^2|^2) = 0$.

il suffit maintenant de prenant $C \to \infty, T \to \infty$ pour avoir $\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) = 0$ c'est à dire $|X_t^1 - X_t^2|^2 = 0$ p.s. ce qui conclue la preuve de l'unicité.

13.2.2 Preuve de l'existence

L'idée est la même que pour une équation différentielle ordinaire : on utilise un point fixe de Picard. Plus précisément on construit une suite de processus aléatoires

— $X_t^0 = x$

— $X_t^1 = x + \int_0^t b(s, X_s^0)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^0)dB_s$

— $X_t^n = x + \int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s$ pour tout $n \geq 1$

Remarquer que par récurence immédiate pour tout n, X^n est adapté. Si maintenant cette suite de processus X^n converge vers un certain X^∞ alors ce X^∞ sera solution de $E(b, \sigma)$.

Commençons par montrer qu'il n'y a pas explosion de la solution et montrons que pour tout t, il existes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}(|X_t^n|^2) \leq C_n$. On fait cela par récurence : en developpant le carré on a

$$\mathbb{E}(|X_t^n|^2) \leq 3(x^2 + \mathbb{E}((\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds)^2) + \mathbb{E}((\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s)^2)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_t^n|^2) &\leq 3(x^2 + K^2\mathbb{E}(\int_0^t (1 + |X_s^{n-1}|)^2 ds) + K^2\mathbb{E}((\int_0^t (1 + |X_s^{n-1}|)^2 ds) \\ &\leq 3x^2 + 2K^2(1 + C_{n-1}) + 2K^2(1 + C_{n-1}) \\ &:= C_n\end{aligned}$$

Montrons maintenant pour un $t > 0$ suffisament petit, le processus $(X_s^n)_{0\leq s\leq t}$ converge pour $n \to \infty$. Pour cela on calcule $\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) \leq\ & 2\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |\int_0^s b(u, X_u^{n-1})du - \int_0^s b(u, X_u^n)du|^2) \\ & + 2\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u|^2).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |\int_0^s b(u, X_u^{n-1})du - \int_0^s b(u, X_u^n)du|^2) &\leq K^2\mathbb{E}(\int_0^s \sup_{u\leq t} |X_u^{n-1} - X_u^n|^2 du) \\ &\leq K^2 t\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2).\end{aligned}$$

On rappelle que pour tout M_t martingale et $p > 1$ on a

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} |M_s|^p)) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_s|^p))$$

Par défintion de l'intégrale stochastique $\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u$ est une martingale et donc avec $p = 2$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u|^2)) \\
&\quad \le 2^2\mathbb{E}(|\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u|^2)) \\
&\quad \le 4\mathbb{E}(|\int_0^s K^2|X_u^{n-1} - X_u^n|^2 du)) \\
&\quad \le 4K^2 t\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2)
\end{aligned}$$

Conclusion on a

$$\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) \le 5K^2 t\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2)$$

On choisit alors $t < \frac{1}{5K^2}$. De tel sorte que

$$\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) \le \kappa\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2)$$

avec $\kappa < 1$. On a immédiatement

$$\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) \le \kappa^n\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^0 - X_s^1|^2) \to 0$$

qui est sommable. Finallement pour tout $m \ge n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^m|^2)^{1/2} &\le \sum_{k\ge n}^{m-1} \mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^k - X_s^{k+1}|^2)^{1/2} \\
&\le (1-\kappa^{1/2})^{-1}\kappa^{n/2}\mathbb{E}(\sup_{s\le t} |X_s^0 - X_s^1|^2)^{1/2} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\sum_{k\ge n} \kappa^k = \kappa^n \sum_{k\ge 0} \kappa^k = (1-\kappa)^{-1}\kappa^n$$

La suite $(X_s^n)_{0\le s\le t}$ forme donc une suite de Cauchy dans L^2. Il existe donc $(X_s^\infty)_{0\le s\le t}$ telle que X^n converge vers X^∞.