Martingales et mouvement brownien. QCM 9 : fonctions à variation finie et martingales continues.

May 1, 2020

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. On considère les fonctions suivantes de $[0,1] \to \mathbb{R}$.

- ☐ La fonction $f(t) = t\sin(\frac{1}{t})$ est à variation finie.
- ☐ Si $f \in L^1([0,1])$ alors $g(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ est à variation finie.
- ☐ Les fonctions lifshitz sont à variation finie.
- ☐ Les fonctions Holder-$\frac{1}{2}$ sont à variation quadratique finie (ie : $\sup_{(t_i^n)_i} \sum_{i<p_n} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|^2 < \infty$).

Exercise 2. Soit f une fonction continue à variation finie, et B_t un mouvement brownien. Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = 1$ une suite de subdivision de $[0,1]$ tel que $\sup_{i<p_n} |t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$. Alors

- ☐ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i<p_n} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|^2 \to 0$
- ☐ Il exist $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i<p_n} f(t_{i+1}^n - t_i^n) \to l$
- ☐ Presque surement $t \to B_t$ est à variation fini.
- ☐ Pour tout n, $\mathbb{E}\big(\sum_{i<p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2\big) = 1$

Exercise 3. Soit M_t une martingale continue bornée dans L^2.

- ☐ Pour tout t $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t) = \mathbb{E}(M_t^2)$.
- ☐ Pour tout $s < t$, $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s)$.
- ☐ Soit $s_1 < s_2$ et alors $V_t = M_{s_1}^2 (M_{s_2\wedge t} - M_{s_1\wedge t})$ est une martingale.
- ☐ Soit $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ alors $W_t = \sum_{i<n} M_{s_{i+1}} (M_{s_{i+1}\wedge t} - M_{s_i\wedge t})$ est une martingale.

Exercise 4. Soit M_t une martingale continue à accroissement indépendant (ie $M_{t_{i+1}} - M_{t_i}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$) tel que pour tout t, $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ et $M_0 = 0$.

- ☐ $\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s$ et $\langle M, M\rangle_s$ sont indépendant.
- ☐ $M_t^2 - \mathbb{E}(M_t^2)$ est une martingale.
- ☐ Il existe une fonction déterministe $F(t)$ tel que$\langle M_t, M_t\rangle = F(t)$ presque surement.
- ☐ Il existe a tel que p.s $\langle M_t, M_t\rangle = at$ presque surement.

Exercise 5. Soient M and N deux martingales continues bornées dans L^2 avec $M_0 = N_0 = 0$

- ☐ Soit $f \in L^1([0,1])$, alors $\mathbb{E}(\int_0^1 f(t) d\langle M, M\rangle_t) < \infty$
- ☐ Si $\langle M, M\rangle_t = 0$ alors $M_s = 0$ pour tout $0 \leq s \leq t$.
- ☐ Si p.s $\langle M, M\rangle_1 = \langle M, M\rangle_{\frac{1}{2}}$ et $\langle N, N\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle N, N\rangle_0 = 0$ alors $\langle M, N\rangle_s = 0$ pour tout $0 \leq s \leq 1$.
- ☐ Si $\langle M, N\rangle_t = 0$ pour tout $t \geq 0$ alors M et N sont indépendantes.