Martingales et mouvement brownien. QCM 10 : integrale stochastique

May 12, 2020

Pour $(M_s)_s$ une martingale continue borné dans L^2, a un processus à variation fini et $H \in L^2(M)$ un processus adapté, on notera $\int_0^t H_s dM_s = (H \cdot M)_t$ l'intégrale stochastique associé à H et M et $\int_0^t H_s da(s) = (H \cdot a)_t$ l'intégrale pour la variation finie associé à H et a.

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. Soit a un processus à variation finie, M_s une martingale continue bornée dans L^2 et H_s un processus adapté uniformément borné ($\exists C > 0$: $|H_s| < C$ p.s pour tout $s \geq 0$).

- ☐ On note $F_t := \int_0^t H_s da(s)$. Alors $(F_t)_{t\geq 0}$ est à variation finie *p.s.*
- ☐ On note $G_t = \int_0^t H_s dM_s$. Alors $(G_t)_{t\geq 0}$ est à variation finie *p.s.*
- ☐ $(F_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
- ☐ Pour tout $t \geq 0$: $\mathbb{E}(\int_0^t H_s dM_s) = 0$

Exercise 2. Soit M_s une martingale continue uniformément bornée dans L^2 et un processus adapté $H_s \in L^2(M)$.

- ☐ $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$ est une martingale continue uniformément bornée dans L^2.
- ☐ $\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M\rangle_t)$
- ☐ Si H est borné, alors $(H \cdot M)$ est borné
- ☐ $\langle (H \cdot M), (H \cdot M)\rangle_t$ est à variation fini sur $[0, 1]$ p.s.

Exercise 3. Soit B_t un mouvement brownien. Soit $(H_s)_{s\geq 0}$ un processus adapté uniformément borné.

- ☐ $\mathbb{E}((H \cdot B)_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(|H_s|^2) ds$
- ☐ Supposons $H_s = 1_{B_s \geq 0}$. Alors pour tout s on a $(H \cdot B)_s \geq 0$ p.s.

☐ $B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s$.

☐ $2\int_0^t B_s dB_s = B_t^2 - t$

Exercise 4. Soit a un processus à variation finie, M_s une martingale continue bornée dans L^2 et H_s un processus adapté uniformément borné ($\exists C > 0$: $|H_s| < C$ p.s pour tout $s \geq 0$) et continue. Soit $0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_{p_n}^{(n)} = t$ une segmentation de $[0,t]$. On supposera que $\max_{i \leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Pour tout n on choisit une suite $0 \leq y_1^{(n)} \leq \cdots \leq y_{p_n}^{(n)} \leq t$ tel que $y_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$ pour tout $i \leq p_n$.

☐ Quelque soit le choix des $y_i^{(n)}$ on a pour $n \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(a_{t_i^{(n)}} - a_{t_{i-1}^{(n)}}) \to \int_0^t H_s da(s).$$

☐ Quelque soit le choix des $y_i^{(n)}$ on a pour $n \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \to \int_0^t H_s dM_s.$$

☐ Si pour tout n, i $y_i^{(n)} = t_{i-1}^{(n)}$ alors $K_k := \sum_{i=0}^k H_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$ est une martingale discrète.

☐ Supposons M borné. Si pour tout n, i $y_i^{(n)} = t_i^{(n)}$ alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1} M_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})\right) \to \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t) = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_0^2)$$

Exercise 5. Soient M and N deux martingales continues bornées dans L^2 et K, H des processus adaptés et bornés.

☐ On a

$$(K \cdot (H \cdot M))_t = \int_0^t K_s H_s dM_s$$

☐ $\langle H \cdot M, N\rangle_t = \langle M, H \cdot N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s$

☐ $\langle H \cdot (M+N), K \cdot N\rangle_t = (HK) \cdot \langle M, N\rangle_t + (HK) \cdot \langle N, N\rangle_t$

☐ Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien alors $\langle B, B \cdot B\rangle_t = tB_t$