Devoir Martingales Continues et Formule d'Ito

26 mai 2020

Ce devoir est à rendre par mail avant le 30 mai au soir. Comme pour le devoir précédemment il comptera pour 1 point de bonus à l'examen.

Exercice 1. On considera ici des mouvements browniens.

1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.
   (a) Soit H une fonction déterministe, constante par morceau. On pourra écrire
   $$H = \sum_{i=1}^{n} h_i 1_{[t_{i-1},t_i]}.$$
   Montrer que pour tout $t \geq 0$ $(H \cdot B)_t$ est une gaussienne, dont on donnera la moyenne et la variance.
   (b) Calculer $\langle (H \cdot B), (H \cdot B)\rangle_t$.
   (c) Pour cette question on ne suppose plus H constante par morceau. Montrer que si $\int_0^\infty H_s^2 ds < \infty$ alors $(H \cdot B)_t$ converge p.s et dans L^2 lorsque $t \to \infty$.
2. Soit $B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(d)}$ des mouvement brownien indépendants. On note $\boldsymbol{B}_t = (B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(d)})$
   (a) Calculer $\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_t$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$.
   (b) Soit A une matrice dans $\mathbb{R}^{d\times d}$. On note le produit scalaire $X_t = (\boldsymbol{B}_t, A\boldsymbol{B}_t^T) = \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_t^{(i)} B_t^{(j)}$. Donner U_t un processus à variation finie tel que $X_t - U_t$ soit une martingale. En déduire une condition sur A tel que X_t soit une martingale.
   (c) Avec la formule d'Ito montrer que $\sin(B_t^{(1)})e^{B_t^{(2)}}$ est une martingale.
   (d) À l'aide de la formule d'Ito démontrer la proposition suivante « Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} f = 0$, alors $f(\boldsymbol{B}_t)$ est une martingale ».

Exercice 2. On considera ici des martingales continues quelconques. Sauf pour la dernière question les processus en questions sont adaptés pour une même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

1. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$, une martingale continue bornée dans L^2 et $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus à variation fini, $A_0 = 0$. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue bornée dans L^2.

(a) On suppose que $X_t = M_t + A_t$. Montrer que cette décomposition est unique.

(b) On suppose que p.s, $t \to A_t$ est croissant. Montrer que X_t est une sousmartingale.

(c) À l'aide de la formule d'Ito proposer une nouvelle preuve de la propriété de Jensen : « Soit $f \in \mathcal{C}^2$ convexe, et $(N_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue alors $f(N_t)$ est une sousmartingale » (on admettra les conditions d'intégrabilités).

2. On suppose maintenant que $M_0 = x$ et $\langle M, M\rangle_t = \sqrt{t}$ pout tout t.

(a) Calculer $\mathbb{E}(M_t^2)$.

(b) On pose $T_0 = \inf\{M_t = 0\}$ et $T_a = \inf\{M_t = a\}$ avec $0 < x < a$. A l'aide d'une martingale bien choisie calculer $\mathbb{E}(\sqrt{T_0 \wedge T_a})$

(c) Pour quel $\sigma \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $Y_t = \exp(\sigma M + f(t))$ est une martingale ?

(d) Soit $0 < t_1 < t_2$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}(e^{\alpha M_{t_1} + \beta(M_{t_2} - M_{t_1})})$. En déduire que M_{t_1} et $(M_{t_2} - M_{t_1})$ sont indépendants.

(e) On pose $W_t := M_{t^2}$, Montrer que W_t est un mouvement brownien issu de x.