Martingales et mouvement brownien, feuille d'exercices 7: le mouvement brownien (suite)

April 9, 2020

Exercice 1. Soit B_t, B'_t deux mouvement brownien indpendant. On définit le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ par $W_0 = 0$ et $W_t = tB_{1/t}$.

1. $\tilde{B}_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2} B'_t$ est un mouvement brownien.
2. Montrer que W_t est le même loi que $(B_t)_{t\geq 0}$.
3. En déduire que
$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$$
p.s.

Exercice 2. On pose $W_t = B_t - tB_1, \ \forall t \in [0,1]$.

1 Montrer que $(W_t)_{t\in[0,1]}$ est un porcessus gaussien centré de covariance
$$\mathbb{E}[W_t W_s] = \min\{t, s\} - ts.$$
pour tout $s, t \in [0,1]$.

2 Montrer que loi de $(W_t)_{t\in[0,1]}$ est la même que $(B_t)_{t\in[0,1]}$ conditionnellement à $B_1 = 0$.

Exercice 3. On pose $M_t = \max_{s\in[0,t]} B_t$.

1 Si $a > 0$ et $b < a$ montrer que
$$\mathbb{P}(M_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

Exercice 4. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, montrer que pour la filtration naturelle:

1. B_t est une martingale

2. $B_t^2 - t$ est une martingale

3. Trouver une relation entre μ et σ tel que $X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$ soit une martingale.

4. En faisant un developpement limit de X_t pour σ petit, retrouver le fait que B_t et $B_t^2 - t$ sont des martingales

5. Trouver une martingale faisant intervenir B_t^3