# Martingales et mouvement brownien. QCM 6 : mouvement brownien

April 4, 2019

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

**Exercise 1.** Soit $(\xi_i)_{i\geq 1}$ des variables gaussiennes iid avec $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_1^2) = 1$ et $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

- ☐ Pour tout $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{N}$, $(S_{k_1}, \cdots, S_{k_m})$ est un vecteur gaussien. Correct
- ☐ $(S_{17} - S_5)$ et $(S_{12} - S_9)$ sont indépendant. Faux
- ☐ $\sum_{i=1}^m S_i$ est une variable gaussienne centré de variance $\sigma^2 = m^3$. Faux
- ☐ $\frac{1}{m^{3/2}} \sum_{i=1}^m S_i$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance $\frac{1}{3}$. Correct

**Solution 1.** En effet:

1. Oui, c'est une combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes.
2. Non, par exemple $\mathbb{E}[(S_{17} - S_5)(S_{12} - S_9)] = \mathbb{E}[(S_9 - S_5)(S_{12} - S_9)] + \mathbb{E}[(S_{12} - S_9)(S_{12} - S_9)] + \mathbb{E}[(S_{17} - S_{12})(S_{12} - S_9)] = \mathbb{E}[(S_{12} - S_9)^2] > 0$.
3. Non, c'est effectivement une variable gaussienne cependant $\sigma^2 = \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^m S_i)^2] = \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^m (m+1-i)\xi_i)^2] = \sum_{i=1}^m (m+1-i)^2 \mathbb{E}[\xi_i)^2 = \frac{(2m+1)(m+1)m}{6}$
4. Oui, avec la question précédente on a bien $\frac{1}{m^{3/2}} \sum_{i=1}^m S_i$ est une variable gaussienne centré de variance $\sigma^2 = \frac{(2m+1)(m+1)m}{6m^3}$ qui converge vers $\frac{1}{3}$.

**Exercise 2.** Soit $(\xi_i)_{i\geq 0}$ des variables aléatoires Bernoulli iid $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = -\frac{1}{2}$. Et on pose $S_0 = \frac{1}{2}$ et $S_{n+1} = S_n + \text{signe}(S_n)\xi_{n+1}$ où $\text{signe}(S_n) = 1$ si $S_n \geq 0$ et $-1$ si $S_n < 0$.

- ☐ On a $S_n = |\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \xi_i|$. Faux
- ☐ $S_n$ est une chaine de Markov. Correct
- ☐ Pour tout $n_1 < n_2$, $S_{n_1}$et $S_{n_2} - S_{n_1}$sont indépendantes. Correct

- ☐ En écrivant $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}$, alors pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ $(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \cdots, S_{t_k}^{(n)})$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_k})$ où $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien. Correct

**Solution 2.** En effet

1. Non, par exemple avec probabilité $1/2$, on a $S_1 = -1/2 < 0$.
2. Oui, $\mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_0 = x_0, S_1 = x_1, \cdots, S_n = x_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_n = x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & y - x_n = 1 \\ \frac{1}{2} & y - x_n = -1 \end{cases}$. Elle est même homogène avec matrice stochastique $Q(x, y) = \frac{1}{2}$ si $|x - y| = 1$ pour tout $x, y \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.
3. Oui, on peut utiliser la question précédente pour dire que $S_n$ suit la même loi qu'une marche aléatoire usuelle partant $\frac{1}{2}$ et donc que $S_{n_1}$ et $(S_{n_2} - S_{n_1})$ sont indépendantes.
4. Oui, même remarque que précédement $S_n$ suit la même loi qu'une marche aléatoire usuelle. Le point de départ n'a pas d'importance puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2} \to 0$.

**Exercise 3.** Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien.

- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$. Correct
- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,A]} B_t > AM) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)$. Faux
- ☐ $\mathbb{P}(\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} B_t = 0) = 1$. Correct
- ☐ $\mathbb{P}(\limsup_{t \to 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty) = 1$. Correct

**Solution 3.** En effet,

1. Oui, $(B_t)_{t \in [0,1]}$ est continue donc borné p.s. et donc $\mathbb{P}(\cap_{M > 0} [\sup_{t \in [0,1]} B_t > M])$. Soit $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$. Il est également possible d'utiliser la formule suivante $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) = 2\mathbb{P}(B_1 > M)$ qui est explicite puisque $B_1$ est une gaussienne.
2. Non, le changement d'échelle correct est le suivant $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t^A > M) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{A} B_{A^2 t} > M) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,A^2]} B_t > AM)$
3. Oui, soit $A_k = [\sup_{t \in [2^{k-1}, 2^k]} \frac{1}{t} B_t > \epsilon]$, $\mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}([\sup_{t \in [2^{k-1}, 2^k]} B_t > \epsilon 2^{k-1}]) = \mathbb{P}([\sup_{t \in [2^{k-1}, 2^k]} B_t^{2^{-k/2}} > \epsilon 2^{k-1}]) = \mathbb{P}([\sup_{t \in [2^{k-1}, 2^k]} 2^{\frac{k}{2}} B_{2^{-k} t} > \epsilon 2^{k-1}]) = \mathbb{P}([\sup_{t \in [1/2, 1]} B_t > \epsilon 2^{k/2-1}])$. On utilise encore la formule $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > \epsilon 2^{k/2-1}) = 2\mathbb{P}(B_1 > \epsilon 2^{k/2-1})$. On a alors que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_1 > \epsilon 2^{k/2-1}) < \infty$ et donc que $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) < \infty$. D'après Borel Cantelli on a alors que $\mathbb{P}(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k) = 0$ et donc que $\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} B_t = 0$ p.s

4. Oui, avec la loi du 0-1 on a montré en exercice que $\mathbb{P}(\limsup_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = \infty) = 1$ et on conclut puisque que $\frac{1}{t} B_t > \frac{1}{\sqrt{t}} B_t$ pour $t \leq 1$ et $B_t > 0$.

**Exercise 4.** Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien. Soit $T = \inf[t \geq 1, B_t = 0]$.

- ☐ Pour tout $\delta > 0$, p.s. il existe $0 < t_1, t_2 < \delta$ tel que $B_{t_1} > 0$ et $B_{t_2} < 0$. Correct
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_t = 0) = 1$. Correct
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_{T+t} = 0) = 1$. Correct
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, p.s pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $B_t = 0$, il existe $t < t' < t+\delta$ tel que $B_{t'} = 0$. Faux

**Solution 4.** En effet,

1. On a $\mathbb{P}(\exists t_1 < \delta, B_{t_1} > 0) = \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,\delta]} B_t > 0) = 1$ et $\mathbb{P}(\exists t_2 < \delta, B_{t_2} < 0) = \mathbb{P}(\inf_{t\in[0,\delta]} B_t < 0) = 1$.
2. Oui, Puisque $t \to (B_t)$ est continue si $t_1 < t_2$ par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [t_1, t_2]$ tel que $B_t = 0$ (et même chose si $t_2 < t_1$).
3. Oui, puisque $\limsup B_t = \infty$ et $\liminf B_t = -\infty$ p.s $T < \infty$ par valeur intermédiaire. De plus, on vérifie que $T$ est un temps d'arret ($T \leq t = [\inf_{s\in[1,t]} |B_s| = 0] \in \mathcal{F}$). Donc par propriété de Markov forte $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_{T+t} = 0) = \mathbb{P}(\exists t < \delta, B_{T+t} - B_T = 0) = \mathbb{P}(\exists t < \delta, B_t = 0) = 1$.
4. Non, contre exemple soit $S = \sup[t \leq 1, B_t = 0]$ alors par définition $\forall t \in (S, 1], B_t \neq 0$. Si cela peut sembler contradictoire avec la question précédente remarquer que $S$ n'est pas un temps d'arret. La position des zéros d'un mouvement brownien n'est pas très intuitive, en effet on à la fois que pour tout $s \in [0,1]$, $\mathbb{P}(B_s = 0) = 0$, et que $B_s$ n'annule un nombre non dénombrable de fois sur $[0,1]$.

**Exercise 5.** Soit $\mu$ la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$. C'est à dire pour tout $A \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$ mesurable pour la tribu borelienne (pour la topologie$\|.\|_{L^\infty}$)), $\mu(A) = \mathbb{P}((t \to B_t)_{t\in[0,1]} \in A)$ où $B_t$ est un mouvement brownien. Soit $f_0$ une fonction continue sur $[0,1]$ avec $f_0(0) = 0$.

- ☐ Soit $M > 0$, et $\delta > 0$ $\mu(f : \sup_{t\in[0,\delta]} |f - f_0| \leq M, f(\delta) = f_0(\delta)) > 0$. Faux
- ☐ Soit $M > 0$, lorsque $\delta \to 0$, $\mu(f : \sup_{t\in[0,\delta]} |f - f_0| \leq M) \to 1$. Correct
- ☐ Pour tout $r > 0$, $\mu([f : \|f - f_0\|_{L^\infty} \leq r]) > 0$. Correct
- ☐ Lorsque $r \to 0$, $\mu([f : \|f - f_0\|_{L^\infty} \leq r) \to 0$. Correct

**Solution 5.** En effet,

1. Non, $\mu(f(\delta) = f_0(\delta)) = \mathbb{P}(B_\delta = f_0(\delta)) = 0$.

2. Oui, $f_0$ est continue, donc lorsque $\delta \to 0$, $\sup_{t\leq\delta} |f_0(t)| \leq M/2$ et on a bien que $\mu(f : \sup_{t\in[0,\delta]} |f(t)| \leq M/2) \to 1$.

3. Oui, je ne donne pas tous les détails ici : $f_0$ est continue donc uniformément continue. Il existe donc $n$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$ tel que $|x - y| \leq \frac{1}{n}$ $|f_0(x) - f_0(y)| \leq \epsilon$. L'idée est de construire le mouvement brownien étapes par étapes sur les $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ de tel sorte que $|B_{\frac{k}{n}} - f_0(\frac{k}{n})| \leq \epsilon$. Par propriété de markov simple

$$\mathbb{P}(|B_{\frac{k+1}{n}} - f_0(\frac{k+1}{n})| \leq \epsilon \,|\, |B_{\frac{k}{n}} - f_0(\frac{k}{n})| \leq \epsilon) = \mathbb{P}(|B_{\frac{1}{n}} - (f_0(\frac{k+1}{n}) - f_0(\frac{k}{n}))| \leq \epsilon|) = \delta > 0$$

   En a alors que $\mathbb{P}(\forall k \leq n, |B_{\frac{k}{n}} - f_0(\frac{k}{n})| \leq \epsilon|) \geq \delta^n > 0$. Pour terminer la question il restera encore à montrer avec probabilité non nulle que sur chaque $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] B_t$ ne fluctue pas plus que $r - 2\epsilon$.

4. Oui, c'est déjà que $\mu(f : |f(1) - f_0(1)| \leq r) \to 0$