Martingales et mouvement brownien. QCM 6 : mouvement brownien

March 31, 2019

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. Soit $(\xi_i)_{i\geq 1}$ des variables gaussiennes iid avec $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\xi_1^2) = 1$ et $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

- ☐ Pour tout $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{N}$, $(S_{k_1}, \cdots, S_{k_m})$ est un vecteur gaussien.
- ☐ $(S_{17} - S_5)$ et $(S_{12} - S_9)$ sont indépendant.
- ☐ $\sum_{i=1}^m S_i$ est une variable gaussienne centré de variance $\sigma^2 = m^3$.
- ☐ $\frac{1}{m^{3/2}} \sum_{i=1}^m S_i$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance $\frac{1}{3}$.

Exercise 2. Soit $(\xi_i)_{i\geq 0}$ des variables aléatoires Bernoulli iid $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = -\frac{1}{2}$. Et on pose $S_0 = \frac{1}{2}$ et $S_{n+1} = S_n + \text{signe}(S_n)\xi_{n+1}$ où $\text{signe}(S_n) = 1$ si $S_n \geq 0$ et -1 si $S_n < 0$.

- ☐ On a $S_n = |\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \xi_i|$.
- ☐ S_n est une chaine de Markov.
- ☐ Pour tout $n_1 < n_2$, S_{n_1}et $S_{n_2} - S_{n_1}$sont indépendantes.
- ☐ En écrivant $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}$, alors pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ $(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \cdots, S_{t_k}^{(n)})$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_k})$ où $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien.

Exercise 3. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien.

- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$.
- ☐ $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,A]} B_t > AM) = \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t > M)$.
- ☐ $\mathbb{P}(\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} B_t = 0) = 1$.
- ☐ $\mathbb{P}(\limsup_{t\to 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty) = 1$.

Exercise 4. Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien. Soit $T = \inf[t \geq 1, B_t = 0]$.

- ☐ Pour tout $\delta > 0$, p.s. il existe $0 < t_1, t_2 < \delta$ tel que $B_{t_1} > 0$ et $B_{t_2} < 0$.
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_t = 0) = 1$.
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_{T+t} = 0) = 1$.
- ☐ Pour tout $\delta > 0$, p.s pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $B_t = 0$, il existe $t < t' < t+\delta$ tel que $B_{t'} = 0$.

Exercise 5. Soit μ la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$. C'est à dire pour tout $A \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$ mesurable pour la tribu borelienne (pour la topologie$\|.\|_{L^\infty}$)), $\mu(A) = \mathbb{P}((t \to B_t)_{t\in[0,1]} \in A)$ où B_t est un mouvement brownien. Soit f_0 une fonction continue sur $[0,1]$ avec $f_0(0) = 0$.

- ☐ Soit $M > 0$, et $\delta > 0$ $\mu(f : \sup_{t\in[0,\delta]} |f - f_0| \leq M, f(\delta) = f_0(\delta)) > 0$.
- ☐ Soit $M > 0$, lorsque $\delta \to 0$, $\mu(f : \sup_{t\in[0,\delta]} |f - f_0| \leq M) \to 1$.
- ☐ Pour tout $r > 0$, $\mu([f : \|f - f_0\|_{L^\infty} \leq r]) > 0$.
- ☐ Lorsque $r \to 0$, $\mu([f : \|f - f_0\|_{L^\infty} \leq r) \to 0$.