

Martingale et mouvement brownien : Feuille d'exercices 8

April 27, 2020

Exercice 1. Soit M une martingale continue telle que $M_0 = x \geq 0$. On suppose que $M_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et que $M_t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ p.s.

1. Montrer que pour tout $y > x$

$$\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} M_t \geq y) = \frac{x}{y}$$

2. En déduire la loi de

$$\sup_{t \leq T_0} B_t$$

avec $T_0 = \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\}$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien issu de $x > 0$.

3. On suppose maintenant que $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de 0 et soit $\mu > 0$. Montrer que

$$\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t)$$

suit la loi exponentielle de paramètre 2μ . (Astuce : On construira une martingale avec le mouvement brownien et la fonction exponentielle.)

Exercice 2. Soit (B_t) un mouvement brownien (issu de 0) et $a > 0$. On note $S_a = \sup\{t \geq 0 : B_t = at\}$ et $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$.

1. Donner la probabilité de $\mathbb{P}(T_a \geq t)$.
2. Montrer que S_a et $1/T_a$ ont même loi. (Astuce : considérer $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$).
3. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $a > 0$

$$\mathbb{E}(S_a) = \frac{c}{a^2}.$$

Exercice 3. Soit B_t un mouvement brownien (issu de 0) et $a, b > 0$. On note

$$T_{a,b} = \inf\{t : B_t = a + bt\}$$

(et $T_{a,b} = \infty$ si le mouvement brownien ne touche pas la droite $a + bt$). Calculer

$$\mathbb{P}(T_{a,b} < \infty)$$

(Astuce : On construira une martingale avec le mouvement brownien et la fonction exponentielle.)