Devoir maison : Martingales et mouvement brownien.

24 avril 2020

1 Enoncé

Problème 1. Soit $\Lambda = [0, A] \times [0, B] \cap \mathbb{Z}^2$ avec $A, B \in \mathbb{N}$. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire usuelle sur Λ, c'est à dire la chaine de Markov telle que pour tout $x, y \in \Lambda$

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } |x-y| = 1 \\ 0 & \text{si } |x-y| > 1 \\ \frac{1}{4}(\text{resp } \frac{1}{2}) & \text{si } x = y \text{ et que } x \text{ est sur le bord (resp le coin) de } \Lambda \end{cases}$$

Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \in \{0\} \times [0, B]\}$, $T_A = \inf\{n : X_n \in \{A\} \times [0, B]\}$, $S_0 = \inf\{n : X_n \in [0, A] \times \{0\}\}$, $S_B = \inf\{n : X_n \in [0, A] \times \{B\}\}$. On notera $\mathcal{F}_n$ la tribu canoniquement associée à (X_n).

1. Montrer que T_0 ,T_A et $T_0 \wedge T_A = \min\{T_0, T_A\}$ sont des temps d'arret.
2. On note $\Lambda^\circ = [1, A-1] \times [1, B-1] \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Lambda$. Montrer que la fonction $f : \Lambda \to \mathbb{R}$ donné par $f(x, y) := x$ est harmonique sur Λ°. Donner deux autres exemples de fonctions harmonique sur Λ° linéairement indépendantes de f.
3. A partir de la question précédente, de X_n et des temps d'arrets T_0, T_A, S_0, S_B construire deux martingales sur Λ que l'on notera M_n et N_n.
4. Montrer que $T_0 \wedge T_A < \infty$ p.s. (Dans la suite on admettra aussi que $S_0 \wedge S_B < \infty$ p.s)
5. Supposons $X_0 = (x_0, y_0)$. Calculer $\mathbb{P}(T_0 < T_A)$ et $\mathbb{P}(S_0 < S_B)$.
6. On note $\partial\Lambda = (\{0, A\} \times [0, B]) \cup ([0, A] \times \{0, B\}) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Lambda$. Soit $u : \partial\Lambda \to \mathbb{R}$, on cherche $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ tel que h est harmonique sur Λ° et $h|_{\partial\Lambda} = u$. Proposer une formule permettant de construire h. Cette solution est-elle unique ? En déduire que $\|h\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$.

7. Dans cette question on suppose $A = B \in 2\mathbb{N}$, et

$$u(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x = A \\ 5 & \text{si } y = 0 \text{ et } x \notin \{0, A\} \\ 0 & \text{si } y = A \text{ et } x \notin \{0, A\} \end{cases}$$

Soit h comme dans la question précédente. Calculer $h(A/2, A/2)$.

Problème 2. Michel joue de l'argent avec un dé. On note les lancés de dés $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui sont des variables aléatoires iid uniformes sur $\{1, \cdots, 6\}$ (les lancés de dés sont équilibrés et indépendants.). Michel commence avec comme argent A_0 et on note $A_n \in \mathbb{N}$ la quantité d'argent au temps n. Avant chaque lancé D_n, Michel mise une somme $1 \leq S_n \leq A_n$ à chaque tour il gagne 5 fois sa mise si $D_n = 6$ et perd sa mise sinon :

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n + 5S_n & \text{si } D_n = 6 \\ A_n - S_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle stratégie une suite de fonction $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $c_n : \{1, \cdots, 6\}^n \to \mathbb{N}$. On dira que Michel suit la stratégie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout n il choisit de miser la somme $S_n = c_n(D_0, \cdots, D_{n-1})$. On note $T = \inf\{n : A_n = 0\}$.

1. Montrer que quelque soit la stratégie choisie, A_n est une martingale. En déduire $\mathbb{E}(A_n)$.
2. Montrer que quelque soit la stratégie, Michel termine ruiné p.s.
3. A t on $A_n \to 0$ dans L^1 ?
4. Ici on supposera que $S_n = 1$ pour tout n. Montrer que pour tout n $(6n + A_0)\mathbb{P}(T > n) \geq A_0$. En déduire que $\mathbb{E}(T) = \infty$.
5. Dans la suite on supposera que le dé n'est plus equilibré et que $\mathbb{P}(D_i = 6) = q < \frac{1}{6}$. Montrer que $A_n + \sum_{i=0}^{n-1}(1 - 6q)S_i$ est une martingale.
6. Avec $S_n = 1$ pour tout n, on admettra que $A_n \to 0$ p.s et dans L^1. Calculer $\mathbb{E}(T)$.
7. On supposera maintenant que $\mathbb{P}(D_i = 6) = p > \frac{1}{6}$ et toujours $S_n = 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe $0 < \gamma < 1$ tel que $N_n := \gamma^{A_n}$ est une martingale.
8. En déduire que $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$, si possible donner $\mathbb{P}(T = \infty)$ en fonction de γ.

2 Correction

Solution 1.

1. Comme dans le cours, on a

$$\{T_0 = n\} = \bigcap_{i<n} \{X_i \notin \{0\} \times [0, B]\} \cap \{X_n \in \{0\} \times [0, B]\},$$

$$\{T_A = n\} = \bigcap_{i<n} \{X_i \notin \{A\} \times [0, B]\} \cap \{X_n \in \{A\} \times [0, B]\}$$

On vérifie que tous les ensembles mentionnés ci dessus $\{X_i \notin \{0\}\times[0, B]\}$, $\{X_n \in \{0\}\times[0, B]\}$,..., appartiennent à $\mathcal{F}_n$. Et donc $\{T_0 = n\}$, $\{T_A = n\}$ et appartiennent à $\mathcal{F}_n$ et on en déduit que T_0, T_A sont des temps d'arrets. Ensuite on a

$$\{T_A \wedge T_0 \leq n\} = \{T_A \leq n\} \cup \{T_0 \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{T_A = k\} \cup \{T_0 = k\}.$$

Chacun de ces éléments appartient $\mathcal{F}_n$ par la question précédent et donc $\{T_A \wedge T_0 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, c'est à dire que $T_0 \wedge T_A$ est un temps d'arret.

2. On vérifie que f est harmonique sur Λ°. Soit $(x, y) \in \Lambda^\circ$, alors

$$\begin{aligned}
Qf(x, y) &= \frac{1}{4}f(x + 1, y) + \frac{1}{4}f(x - 1, y) + \frac{1}{4}f(x, y + 1) + \frac{1}{4}f(x + 1, y - 1) \\
&= \frac{1}{4}(x + 1 + x - 1 + x + x) \\
&= x \\
&= f(x, y).
\end{aligned}$$

De la même manière on a que $g(x, y) := y$ est harmonique sur Λ°. Comme troisième exemple de fonctions harmonique on peut mentionner $h(x, y) :=$ 1 qui est toujours harmonique quelque soit la chaine de Markov. On peut aussi mentionner $h(x, y) := xy$ car pour tout $(x, y) \in \Lambda^\circ$

$$\begin{aligned}
Qh(x, y) &= \frac{1}{4}(yx + y + yx - y + yx - x + yx + x) \\
&= xy \\
&= h(x, y).
\end{aligned}$$

Ce ne sont pas les seules. De fait toute solution au problème de Dirichlet est par définition harmonique sur Λ°, en choisissant les conditions au bords on peut alors construire une grande variétés de fonctions harmoniques.

3. On a la propriété du cours suivant : Si f est harmonique sur Λ° et $T = \inf\{n : X_n \notin \Lambda^\circ\}$ alors $M_n := f(X_{n\wedge T})$ est une martingale. On a ici que $T = T_0 \wedge T_A \wedge S_0 \wedge S_A$. (Attention $f(X_n)$ n'est pas une martingale car f n'est pas harmonique sur Λ tout entier.) De même on a que

$N_n := g(X_{n\wedge T})$ est une martingale. Cependant pour la suite il était plus pertinent de poser

$$M_n := f(X_{n\wedge T_0\wedge T_A}) \text{ et } N_n := g(X_{n\wedge S_0\wedge S_A}).$$

Pour cela il faut faire un peu plus que la question précédente et montrer que f (resp g) est bien harmonique sur $[1, A-1] \times [0, B] \cap \mathbb{Z}^2$ (resp $[0, A] \times [1, B-1] \cap \mathbb{Z}^2$). On l'a déjà vérifié que f est harmonique sur les sommets $(x, y) \in \Lambda^\circ$. Il reste donc les sommets de type $(x, 0)$ et (x, B). On a

$$\begin{aligned}
Qf(x,0) &= \frac{1}{4}f(x+1,0) + \frac{1}{4}f(x-1,0) + \frac{1}{4}f(x,1) + \frac{1}{4}f(x,0) \\
&= \frac{1}{4}(x+1+x-1+x+x) \\
&= x \\
&= f(x,0).
\end{aligned}$$

On fait la même chose pour les sommets (x, B). La fonction f est donc bien harmonique sur $[1, A-1] \times [0, B] \cap \mathbb{Z}^2$ et $T_0 \wedge T_A = \inf\{n : X_n \notin [1, A-1] \times [0, B] \cap \mathbb{Z}^2\}$. On en déduit alors que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(X_{n\wedge T_0\wedge T_A})$ est une martingale. Par le même raisonnement on obtient que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} = g(X_{n\wedge S_0\wedge S_A})$ est une martingale.

4. Il y a plusieurs manières de faire cette question. On peut utiliser l'astuce vu en séance d'exercice. La martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée uniformément par $0 \leq M_n \leq A$ et donc elle converge p.s. Comme elle est à valeur entière, on en déduit qu'elle est constante à partir d'un certain rang p.s. Montrons que les seules valeurs possibles sont 0 ou A. Soit $x \neq 0, A$ et $N \in \mathbb{N}$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\forall n \geq N : M_n = x) \leq\ & \mathbb{P}(X_N = (x,0), X_{N+1} = (x,0), \cdots, X_{N+k} = (x,0)) + \\
&+ \mathbb{P}(X_N = (x,B), X_{N+1} = (x,B), \cdots, X_{N+k} = (x,B)) \\
\leq\ & \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k}
\end{aligned}$$

On obtient alors $\mathbb{P}(\forall n \geq N : M_n = x) = 0$. Presque surement, il existe donc N tel que $M_n = 0$ pour tout $n \geq N$ ou $M_n = A$ pour tout $n \geq N$ ce qui correspond à $T_0 < \infty$ ou $T_A < \infty$.

5. D'après la question précédente

$$M_n = f(X_{n\wedge T_0\wedge T_A}) \to f(X_{T_0\wedge T_A}) = \begin{cases} 0 & \text{si } T_0 < T_A \\ A & \text{si } T_A < T_0 \end{cases}$$

p.s pour $n \to \infty$. De plus puisque $0 \leq M_n \leq A$, M_n converge également dans L^1. On a alors

$$x_0 = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_n) \to \mathbb{E}(f(X_{T_0\wedge T_A})) = A \times \mathbb{P}(T_A < T_0)$$

soit

$$\mathbb{P}(T_0 < T_A) = 1 - \mathbb{P}(T_A < T_0) = 1 - \frac{x_0}{A}.$$

Par un raisonnement similaire on obtient

$$\mathbb{P}(S_0 < S_B) = 1 - \frac{y_0}{B}.$$

6. On pose la fonction

$$h(x, y) = \mathbb{E}_{(x,y)}(u(X_T))$$

où $T = T_0 \wedge T_A \wedge S_0 \wedge S_B$ comme précédemment et $\mathbb{E}_x$ est pour la chaine de Markov issue de $X_0 = (x, y)$. C'est un théorème du cours que h est bien harmonique sur Λ°et $h = u$ sur $\partial\Lambda$. De plus cette solution est unique car $T \leq T_0 \wedge T_A < \infty$ p.s. Enfin pour tout $(x, y) \in \Lambda$ on a

$$|h(x, y)| \leq \mathbb{E}_{(x,y)}(|u(X_T)|) \leq \max_{(s,t)\in\partial\Lambda} |u(s, t)|$$

et donc

$$\|h\|_{L^\infty} = \max_{(x,y)\in\Lambda} |h(x, y)| \leq \max_{(s,t)\in\partial\Lambda} |u(s, t)| = \|u\|_{L^\infty}.$$

Il était aussi possible de refaire la preuve du « principe du maximum » pour les fonctions harmoniques.

7. Dans cette question Λ est un carré et $(\frac{A}{2}, \frac{A}{2})$ est le centre de ce carré. Pour la chaine de Markov issue de $(\frac{A}{2}, \frac{A}{2})$, puisque les coins ne sont pas atteignables sans rencontrer un bord au préalable, le problème est ici complètement symétrique. On a alors

$$\mathbb{P}(T = T_0) = \mathbb{P}(T = T_A) = \mathbb{P}(T = S_0) = \mathbb{P}(T = S_B) = \frac{1}{4}$$

En utilisant la formule de la question précédente on obtient

$$\begin{aligned}
h(\frac{A}{2}, \frac{A}{2}) &= \mathbb{E}_{(\frac{A}{2},\frac{A}{2})}(u(X_T)) \\
&= \mathbb{E}_{(\frac{A}{2},\frac{A}{2})}(1_{T=T_0} u(X_{T_0})) + \mathbb{E}_{(\frac{A}{2},\frac{A}{2})}(1_{T=T_A} u(X_{T_A})) \\
&\quad + \mathbb{E}_{(\frac{A}{2},\frac{A}{2})}(1_{T=S_0} u(X_{S_0})) + \mathbb{E}_{(\frac{A}{2},\frac{A}{2})}(1_{T=S_B} u(X_{S_B})) \\
&= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times (-1) + \frac{1}{4} \times 5 + \frac{1}{4} \times 0 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Solution 2. On pose la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(D_0, \cdots, D_{n-1})$.

1. On a la borné élémentaire $A_n \leq 6^n A_0$ de telle sorte que pour tout n, $\mathbb{E}(|A_n|) < \infty$. On montre par récurence que A_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable, on a

$$A_{n+1} = A_n + 1_{D_n=6} \times 5 \times c_n(D_0, \cdots, D_{n-1}) - 1_{D_n\neq 6} \times c_n(D_0, \cdots, D_{n-1})$$

Par hypothèse de récurence A_n est $\mathcal{F}_n$ donc $\mathcal{F}_{n+1}$ mesurable, les termes de droites sont aussi $\mathcal{F}_{n+1}$ mesurable et donc A_{n+1} est bien $\mathcal{F}_{n+1}$ mesurable. Enfin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(A_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(1_{D_n=6} \times 5 \times c_n(D_0, \cdots, D_{n-1})|\mathcal{F}_n) \\
&\quad - \mathbb{E}(1_{D_n\neq 6} \times c_n(D_0, \cdots, D_{n-1})|\mathcal{F}_n) \\
&= A_n + 5 \times c_n(D_0, \cdots, D_{n-1}) \times \mathbb{E}(1_{D_n=6}|\mathcal{F}_n) \\
&\quad - c_n(D_0, \cdots, D_{n-1}) \times \mathbb{E}(1_{D_n\neq 6}|\mathcal{F}_n) \\
&= A_n + (\frac{5}{6} - \frac{5}{6})c_n(D_0, \cdots, D_{n-1}) \\
&= A_n
\end{aligned}$$

où on a utiliser que A_n et $c_n(D_0, \cdots, D_{n-1})$ étaient $\mathcal{F}_n$ mesurable à la deuxième égalité et que D_n est indépendant de $\mathcal{F}_n$ à la troisième égalité. On a donc bien que $(A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2. La martingale A_n est positive. Elle converge donc presque surement. Ici la seule limite possible est 0 donc $A_n \to 0$ p.s. De plus A_n est à valeur entière, donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$: $A_n = 0$. Michel fini donc bien ruiné.
3. Pour tout n, $\mathbb{E}(A_n) = A_0$, ne converge pas vers 0. On n'a donc pas de convergence L^1.
4. Puisque $S_n = 1$ pour tout n, $A_{n+1} \leq A_n + 5$ et par récurrence immédiate on a
$$A_n \leq A_0 + 5n \leq A_0 + 6n.$$
Remarquons que si $T \leq n$ alors $A_n = 0$. Puisque A_n est une martingale, on a pour tout n
$$\begin{aligned}
A_0 = \mathbb{E}(A_n) &= \mathbb{E}(A_n 1_{T\leq n}) + \mathbb{E}(A_n 1_{T>n}) \\
&\leq 0 + \mathbb{E}(1_{T>n}(A_0 + 6n)) \\
&= (A_0 + 6n)\mathbb{P}(T > n).
\end{aligned}$$
On a alors
$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{n<T}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T > n) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A_0}{(A_0 + 6n)} = \infty$$
5. Que $A_n + \sum_{i=0}^{n-1}(1-6q)S_i$ soit dans L^1 et $\mathcal{F}_n$ mesurable fonctionne comme

à la question 1. Puisque S_n et A_n sont $\mathcal{F}_n$ mesurable, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(A_{n+1}+\sum_{i=0}^{n}(1-6q)S_i|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(A_n|\mathcal{F}_n)+\mathbb{E}(1_{D_n=6}\times 5\times S_n|\mathcal{F}_n)\\ &\quad -\mathbb{E}(1_{D_n\neq 6}\times S_n|\mathcal{F}_n)+\sum_{i=0}^{n}(1-6q)S_i\\ &= A_n+5\times S_n\times\mathbb{E}(1_{D_n=6}|\mathcal{F}_n)\\ &\quad -S_n\times\mathbb{E}(1_{D_n\neq 6}|\mathcal{F}_n)+\sum_{i=0}^{n}(1-6q)S_i\\ &= A_n+(5q-(1-q))S_n+\sum_{i=0}^{n}(1-6q)S_i\\ &= A_n+\sum_{i=0}^{n-1}(1-6q)S_i\end{aligned}$$

6. Pour $S_n=1$ pour tout n, d'après la question précédente, $A_n+(1-6q)n$ est une martingale. Donc pour tout n

$$A_0=\mathbb{E}(A_{n\wedge T}+(1-6q)n\wedge T)=\mathbb{E}(A_{n\wedge T})+(1-6q)\mathbb{E}(n\wedge T)$$

   On a que $\mathbb{E}(A_{n\wedge T})\to 0$ par la convergence L^1 et $T<\infty$ p.s par la convergence p.s de A_n. Donc $n\wedge T\to T$ p.s. Par convergence monotone $\mathbb{E}(n\wedge T)\to\mathbb{E}(T)$ et on peut donc conclure

$$\mathbb{E}(T)=\frac{A_0}{1-6q}.$$

7. Pour tout $n\geq 0$ on

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(\gamma^{A_{n+1}}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\gamma^{A_n}\gamma^{1_{D_n=6}\times 5-1_{D_n\neq 6}}|\mathcal{F}_n)\\ &= \gamma^{A_n}\mathbb{E}(\gamma^{1_{D_n=6}\times 5-1_{D_n\neq 6}}|\mathcal{F}_n)\\ &= \gamma^{A_n}\mathbb{E}(1_{D_n=6}\gamma^5+1_{D_n\neq 6}\gamma^{-1}|\mathcal{F}_n)=\\ &= N_n(p\gamma^5+(1-p)\gamma^{-1})\end{aligned}$$

   On a alors que N_n est une martingale si et seulement si

$$p\gamma^5+(1-p)\gamma^{-1}=1.$$

   Il reste à analyser la fonction $a(\gamma):=p\gamma^5+(1-p)\gamma^{-1}$ pour $\gamma\in(0,1]$. Calculons sa dérivée

$$a'(\gamma)=5p\gamma^4-(1-p)\gamma^{-2}.$$

   On a alors que $a(1)=1$ et $a'(1)=5p-(1-p)=6p-1>0$. Il existe donc $\epsilon>0$ tel que $a(\gamma)<1$ pour tout $\gamma\in(1-\epsilon,1)$. De plus on observe que $a(\gamma)\to\infty$ lorsque $\gamma\to 0$ et donc par continuité, il existe $\gamma^*\in(0,1-\epsilon)$ tel que $a(\gamma^*)=1$.

8. Pour $\gamma = \gamma^*$, N_n est une martingale. Pour tout n, on a $0 \leq N_n \leq 1$, donc N_n converge p.s et dans L^1. N_n est à valeur discrète dans $\{1, \gamma, \gamma^2, \cdots,\}$ donc $N_n \to 0$ ou N_n est constante à partir d'un certain rang. Si elle est constante, seul la valeur 1 qui correspond à $A_n = 0$ est possible. Conclusion N_n converge vers 0 ou 1 p.s ce qui correspond à $A_n = 0$ à partir d'un certain rang ou $A_n \to \infty$ p.s. Enfin pour tout n

$$\begin{aligned}\gamma^{A_0} = \mathbb{E}(N_n(1_{T\leq n} + 1_{T>n})) &= \mathbb{E}(\gamma^{A_T} 1_{T\leq n}) + \mathbb{E}(N_n 1_{T>n}) \\ &= \mathbb{P}(T \leq n) + \mathbb{E}(N_n 1_{T=\infty}) + \mathbb{E}(N_n 1_{T>n} 1_{T<\infty})\end{aligned}$$

On a alors pour $n \to \infty$: $\mathbb{P}(T \leq n) \to \mathbb{P}(T < \infty)$, $\mathbb{E}(N_n 1_{T=\infty}) \to 0$ par convergence de N_n dans L^1 et $\mathbb{E}(N_n 1_{T>n} 1_{T<\infty}) \to 0$ par convergence dominé. Conclusion

$$\gamma^{A_0} = \mathbb{P}(T < \infty) = 1 - \mathbb{P}(T = \infty)$$