Examen : martingales et mouvement brownien

June 13, 2019

1 Martingales discretes

Question de cours : Redémontrer le théorème suivant : Soit M_n une martingale discrete et T un temps d'arret borné alors

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$$

Problem 1. Soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables independantes identiquement distribuées avec $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = q = (1-p)$ et

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

avec $X_0 = x_0 \in \mathbb{N}$ constante. On considera $\mathcal{F}_n = \sigma((\xi_i)_{i\leq n})$ la filtration canonique engendré par les ξ.

1. Montrer que $M_n = X_n - (p-q)n$ est une martingale.
2. Soit $T_0 = \inf[n : X_n = 0]$. Montrer que T_0 est un temps arret.
3. On suppose pour la suite que $p < \frac{1}{2}$. Montrer que $X_n \to -\infty$ presque surement, en déduire que $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$.
4. Prouver $\mathbb{E}(X_{T_0\wedge n+1}) = \mathbb{E}(X_{T_0\wedge n}) - (p-q)\mathbb{P}(X_{n\wedge T_0} > 0)$
5. Montrer que
$$\mathbb{E}(T_0) = \frac{x_0}{q-p}.$$
6. On suppose maintenant que $p = q = \frac{1}{2}$. Montrer que $M_{n\wedge T_0}$ converge presque surement.
7. En déduire que pour ce cas ci on a également $T_0 < \infty$ p.s
8. A t on $\mathbb{E}(M_{T_0}) = \mathbb{E}(M_0)$?
9. Pour cette question $1 > p, q > 0$ sont quelconques. Rappeler pourquoi X_n est une chaine de Markov.

10. On pose $f(k) = (\frac{q}{p})^k$. Montrer que f est une fonction harmonique pour la chaine de markov X_n.

11. Montrer que $N_n = f(X_n)$ est une martingale.

12. Soit $L > x_0$ et $T_L = \inf[n : X_n = L]$, montrer que $\mathbb{P}(T_L \wedge T_0 < \infty) = 1$

13. Montrer que

$$\mathbb{P}(T_L < T_0) = \frac{(\frac{q}{p})^{x_0} - 1}{(\frac{q}{p})^L - 1}$$

Solution 1. On a

1. On vérifie facilement que M_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable et qu'elle est bornée donc intégrable. Puis on calule

   $$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1} - (p-q)|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}) - (p-q) + M_n = M_n$$

   car ξ_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$ et M_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une martingale

2. On écrit $[T_0 = k] = \cap_{i<k}[X_i \neq 0] \cap [X_k = 0]$ qui est bien $\mathcal{F}_k$ mesurable.

3. On a $\mathbb{E}(\xi_1) = p - q = 2p - 1 < 0$. Par loi forte des grand nombres $X_n \sim (p-q)n \to -\infty$ presque surement. Il existe donc un premier temps k tel que $X_k < 0$ et puisque pour tout k, $|X_{k-1} - X_k| = 1$ on a $X_{k-1} = 0$ et donc $T_0 < \infty$.

4. Calculons

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{T_0\wedge(n+1)}) &= \mathbb{E}(X_{T_0\wedge(n+1)}(1_{T_0\leq n} + 1_{T_0>n}))\\ &= \mathbb{E}(X_{T_0}1_{T_0\leq n}) + \mathbb{E}(X_{n+1}1_{T_0>n}))\\ &= \mathbb{E}(X_{T_0}1_{T_0\leq n}) + \mathbb{E}(X_n 1_{T_0>n}) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}1_{T_0>n})\\ &= \mathbb{E}(X_{T_0\wedge n}) + (p-q)\mathbb{P}(T_0 > n).\end{aligned}$$

   Pour la derniere égalité, on a utilisé que $T_0 > n$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable et ξ_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$.

5. Puisque M_n est une martingale on pour tout n

   $$\mathbb{E}(M_{n\wedge T_0}) = \mathbb{E}(M_0) = x_0$$

   et donc $\mathbb{E}(X_{T_0\wedge n} - (p-q)(T_0 \wedge n)) = x_0$ et donc $\mathbb{E}(T_0 \wedge n) = \frac{1}{q-p}(x_0 - \mathbb{E}(X_{T_0\wedge n}))$. Puisque $T_0 < \infty$ p.s. on a $\mathbb{E}(T_0 \wedge n) = \mathbb{E}(T_0)$ par croissance monotone. Il reste cependant à montrer que $\mathbb{E}(X_{T_0\wedge n}) \to 0$.

6. $M_{n\wedge T_0}$ est une martingale positive. Elle est donc uniformément borné dans L^1, donc elle converge presque surement.

7. Puisque $M_{n\wedge T_0}$ converge et est à valeur entière, elle est constante à partir d'un certain rang. Donc p.s il existe k tel que $M_{T_0\wedge(k+1)} = M_{T_0\wedge k}$ et donc que $T_0 \leq k$.

8. On a $\mathbb{E}(M_{T_0}) = 0$ alors que $\mathbb{E}(M_0) = x_0 \neq 0$ à priori.

9. On a bien

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_0, \cdots, X_n) = \begin{cases} p & \text{if } X_n = k-1 \\ q & \text{if } X_n = k+1 \end{cases} = \mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n)$$

10. On a $f(k) = (\frac{q}{p})^k$, on calcule

$$\begin{aligned} Qf(k) &= pf(k+1) + qf(k-1) \\ &= p(\frac{q}{p})^{k+1} + q(\frac{q}{p})^{k-1} \\ &= (\frac{q}{p})^{k-1}(\frac{q^2}{p} + q) \\ &= (\frac{q}{p})^{k-1}q(\frac{q+p}{p}) \\ &= (\frac{q}{p})^k \end{aligned}$$

Puisque f est harmonique on a bien $N_n = f(X_n)$ verifie bien la propriété de martingale et il est facile de vérifier que N_n est bornée et $\mathcal{F}_n$ mesurable.

11. De même $N_{n\wedge(T_L\wedge T_0)}$ est une martingale bornée donc converge presque surement. Même argument que ci dessus, puisqu'elle prend qu'un nombre fini de valeurs elle est constante à partir d'un certaint rang et donc $(T_L \wedge T_0 < \infty$ p.s.

12. Finallement on a

$$(\frac{q}{p})^{x_0} = \mathbb{E}(N_{n\wedge(T_L\wedge T_0)}) \to \mathbb{E}(N_{(T_L\wedge T_0)}) = (\frac{q}{p})^L \mathbb{P}(T_L < T_0) + \mathbb{P}(T_0 > T_L)$$

De plus $\mathbb{P}(T_L < T_0) + \mathbb{P}(T_0 > T_L) = 1$et donc

$$((\frac{q}{p})^L - 1)\mathbb{P}(T_L < T_0) = (\frac{q}{p})^{x_0} - 1$$

2 Martingales continues

Question de cours Rappeler la définition d'un mouvement brownien (en dimension 1) et montrer que si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, alors pour $\alpha > 0$ $B_t^\alpha := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_{\alpha t}$ est aussi un mouvement brownien .

Problem 2. Soit la semimartingale continue suivante

$$M_t = B_t - at$$

avec B_t un mouvement brownien et $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit N_t, V_t une martingale continue et un processus à variation fini issue de 0 et tel que $M_t = N_t + V_t$. Montrer que $N_t = B_t$ et $V_t = -at$.
2. Soit $H_t = t$, écrire sous forme intégrale l'intégrale stochastique $(H \cdot M)_t$.
3. Calculer $\mathbb{E}((H \cdot M)_1)$ et $\mathbb{E}[((H \cdot M)_1)^2]$.
4. Calculer la variation quadratique de M_t et celle de $(H \cdot M)_t$. Vérifier que cette dernière est égale à $\frac{1}{2}t^2$ p.s.
5. On suppose ici $a = 0$, et on écrit $R_u = (H \cdot M)_{\sqrt{2u}}$. Montrer que R_1 est une gaussienne.
6. Montrer que R_u est un mouvement brownien pour une filtration que l'on précisera.

Solution 2. un mouvement brownien et $a \in \mathbb{R}$.

1. On a $N_t - B_t = V_t + at$. Donc $N_t - B_t$ est une martingale continue à variation finie. Elle est donc constante.
2. On a
$$(H \cdot M)_t = \int_0^t s\mathrm{d}s + \int_0^t s\mathrm{d}B_s$$
3. Ensuite
$$\mathbb{E}((H \cdot M)_1) = \int_0^1 s\mathrm{d}s = \frac{1}{2}$$
et
$$\mathbb{E}[((H \cdot M)_1)^2] = [\int_0^1 s\mathrm{d}s]^2 + \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$
4. La variation quadratique vient uniquement de la partie martingale, donc $\langle M, M\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$. Ensuite
$$\langle (H \cdot M), (H \cdot M)\rangle_t = H^2 \langle M, M\rangle_t = \int_0^t t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3$$
5. Puisque $a = 0$ on a
$$R_1 = (H \cdot M)_{{}^3\sqrt{3}} = \int_0^{{}^3\sqrt{3}} s\mathrm{d}B_s.$$
Pour tout sequence $0 < s_1 < \cdots < s_k =^3 \sqrt{3}$, $(B_{s_1}, (B_{s_2} - B_{s_1}), \cdots, (B_{s_k} - B_{s_{k-1}}))$ est un vecteur gaussien. Et donc $\sum s_i(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})$ est gaussien de

variance $\sum s_i^2$. Ensuite pour des sous sequences emboité d'écart maximal tendant vers 0 on a

$$\sum s_i(B_{s_{i+1}} - B_{s_i}) \to \int_0^{3\sqrt{3}} s \mathrm{d}B_s$$

pour la convergence en proba donc en loi. La limite d'une variable gaussienne est gaussienne et la variance est bien $\int_0^{3\sqrt{3}} s^2 ds = \frac{1}{3}3 = 1$.

6. On a que $\langle R, R \rangle_v = (H \cdot M)_{3\sqrt{3v}} = \frac{1}{3}3v = v$. D'après le théorème d'Ito, R est donc un mouvement brownien. Pour la filtration $\mathcal{B}_u = \mathcal{F}_{3\sqrt{3u}}$.

Problem 3. Soit l'équation stochastique suivante

$$dX_t = \sigma X_t dB_t$$

avec $X_0 = 1$.

1. Justifier qu'il existe une solution et que celle ci est unique au sens des trajectoires pour un mouvement brownien B_t donné.
2. Vérifier que
$$X_t = \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$$
est solution de cette équation.
3. Montrer que X_t converge vers 0 presque surement.
4. Montrer que $\mathbb{E}(X_t^2)$ n'est pas uniformément borné.
5. Soit $T_a = \inf[t : X_t \geq a]$ pour $a > 1$, montrer que $\mathbb{E}(X_{T_a \wedge t}) \to a\mathbb{P}(T_a < \infty)$ pour $t \to \infty$.
6. En déduire que pour $y \geq 0$ $\mathbb{P}(\exists u \geq 0 : B_u - \frac{\sigma}{2}u > y) = \exp(-\sigma y)$.

Solution 3. On

1. L'équation s'ecrit comme $dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t$ avec $\sigma(t, X_t) = \sigma X_t$ qui est Lipschitz. On peut donc utiliser le théorème d'existence et d'unicité au sens des trajectoires pour les équations stochastique dans le cas Lipschitzien.
2. On utilise la formule d'Ito

$$\begin{aligned}
X_t &= \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t) \\
&= 1 - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)\mathrm{d}s \\
&= X_0 + \int_0^t \sigma X_s \mathrm{d}B_s
\end{aligned}$$

3. X_0 est une martingale positive. Elle converge donc p.s. Donc sa variation quadratique converge p.s. Or on a

$$\langle X, X\rangle_t = \sigma^2 \int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s \sim \sigma^2 X_\infty^2 t$$

et donc la limite $X_\infty = 0$ p.s.

4. On raisonne par l'absurde. Si $\mathbb{E}(X_t^2)$ est borné alors c'est une martingale borné dans L^2. Et donc X_t converge p.s, dans L^2 et donc dans L^1. Pour tout t $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) = 1$. Donc on n'a pas $\mathbb{E}(X_t) \to \mathbb{E}(X_\infty) = 0$.

5. $1 = \mathbb{E}(X_{T_a \wedge t}) = a\mathbb{P}(T_a < t) + \mathbb{E}(X_t 1_{T_a \geq t}) \to a\mathbb{P}(T_a < \infty)$. Car $X_t 1_{T_a \geq t} \to 0$ et puisque $X_t 1_{T_a \geq t} \leq a$ on peut utiliser le théorème de convergence dominé.

6. Avec $a = \exp(\sigma y)$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists u \geq 0 : B_u - \frac{\sigma}{2}u > y) &= \mathbb{P}(\exists u \geq 0 : \exp(\sigma B_u - \frac{\sigma^2}{2}u) > \exp(\sigma y))\\ &= \mathbb{P}(T_a < \infty)\\ &= \exp(-\sigma y)\end{aligned}$$