Examen : martingales et mouvement brownien

13 juin 2019

Durée de l'examen 3h00.

1 Martingales discretes

Question de cours : Redémontrer le théorème suivant : Soit M_n une martingale discrete et T un temps d'arret borné alors

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$$

Problem 1. Soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables independantes identiquement distribuées avec $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = q = (1-p)$ et

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

avec $X_0 = x_0 \in \mathbb{N}$ constante. On notera $\mathcal{F}_n = \sigma((\xi_i)_{i\leq n})$ la filtration canonique engendré par les ξ.

1. Montrer que $M_n = X_n - (p-q)n$ est une martingale.
2. Soit $T_0 = \inf[n : X_n = 0]$. Montrer que T_0 est un temps arret.
3. On suppose pour la suite que $p < \frac{1}{2}$. Montrer que $X_n \to -\infty$ presque surement, en déduire que $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$.
4. Prouver $\mathbb{E}(X_{(n+1)\wedge T_0}) = \mathbb{E}(X_{n\wedge T_0}) + (p-q)\mathbb{P}(X_{n\wedge T_0} > 0)$
5. Montrer que
$$\mathbb{E}(T_0) = \frac{x_0}{q-p}.$$
6. On suppose maintenant que $p = q = \frac{1}{2}$. Montrer que $M_{n\wedge T_0}$ converge presque surement.
7. En déduire que pour ce cas ci on a également $T_0 < \infty$ p.s
8. A t on $\mathbb{E}(M_{T_0}) = \mathbb{E}(M_0)$?

9. Pour cette question et les suivantes $1 > p, q > 0$ sont quelconques. Rappeler pourquoi X_n est une chaine de Markov.

10. On pose $f(k) = (\frac{q}{p})^k$. Montrer que f est une fonction harmonique pour la chaine de markov X_n. En déduire que $N_n = f(X_n)$ est une martingale.

11. Soit $L > x_0$ et $T_L = \inf[n : X_n = L]$. Montrer que $\mathbb{P}(T_L \wedge T_0 < \infty) = 1$

12. Montrer que

$$\mathbb{P}(T_L < T_0) = \frac{(\frac{q}{p})^{x_0} - 1}{(\frac{q}{p})^L - 1} \text{ si } p \neq q \text{ ou } \mathbb{P}(T_L < T_0) = \frac{x_0}{L} \text{ si } p = q.$$

2 Martingales continues

Question de cours Rappeler la définition d'un mouvement brownien (en dimension 1) et montrer que si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, alors pour $\alpha > 0$ $B_t^\alpha := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_{\alpha t}$ est aussi un mouvement brownien.

Problem 2. Soit la semimartingale continue suivante

$$M_t = B_t - at$$

avec B_t un mouvement brownien et $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit N_t, V_t une martingale continue et un processus à variation finie issue de 0 et tel que $M_t = N_t + V_t$. Montrer que $N_t = B_t$ et $V_t = -at$.

2. Soit $H_t = t$, écrire sous forme intégrale l'intégrale stochastique $(H \cdot M)_t$.

3. Calculer $\mathbb{E}((H \cdot M)_1)$ et $\mathbb{E}[((H \cdot M)_1)^2]$.

4. Calculer la variation quadratique de M_t et celle de $(H \cdot M)_t$.

5. On suppose ici $a = 0$, et on écrit $R_u = (H \cdot M)_{\sqrt[3]{3u}}$. Montrer que R_1 est une gaussienne.

6. Montrer que R_u est un mouvement brownien pour une filtration que l'on précisera.

Problem 3. Soit l'équation stochastique suivante

$$dX_t = \sigma X_t dB_t$$

avec $X_0 = 1$.

1. Justifier qu'il existe une solution et que celle ci est unique au sens des trajectoires pour un mouvement brownien B_t donné.

2. Vérifier que
$$X_t = \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$
est solution de cette équation.
3. Montrer que X_t converge vers 0 presque surement.
4. Montrer que $\mathbb{E}(X_t^2)$ n'est pas uniformément borné.
5. Soit $T_a = \inf[t : X_t \geq a]$ pour $a > 1$, montrer que $\mathbb{E}(X_{T_a \wedge t}) \to a\mathbb{P}(T_a < \infty)$ lorsque $t \to \infty$.
6. En déduire que pour $y \geq 0$ $\mathbb{P}(\exists u \geq 0 : B_u - \frac{\sigma}{2} u > y) = \exp(-\sigma y)$.