QCM 4 : Chaines de Markvo et martingales discrètes.

March 20, 2020

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

Exercise 1. Soit X_n la marche aléatoire usuelle sur $\mathbb{Z}^2$: $\mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) = Q(x,y) = \frac{1}{4}$ si $\|x-y\| = 1$ et $Q(x,y) = 0$ sinon. Soit $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ et $T_1 = \inf[k : X_k \in A]$ et $T_2 = \inf[k > T_1 : X_k \in B]$.

- ☐ $\mathbb{P}_0(X_2 = (1,1)) = Q^2((0,0),(1,1)) = \frac{1}{16}$
- ☐ $X_{n\wedge T_1}$ est une chaine de Markov
- ☐ $X_{n\wedge T_2}$est une chaine de Markov
- ☐ On écrit les coordonnés de $X_n = (a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ alors $f(X_n) = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma$ est une martingale.

Exercise 2. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires entières iid et $\xi_1 > 0$ p.s. On défini la chaine de Markov suivante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $S_0 = 1$ et la relation de récurence $S_{n+1} = \xi_n S_n$. On pose $F = \sum_{i=1}^{10} S_i$, $G = S_{12} - S_{10}$ et $H = \xi_9$.

- ☐ Si on écrit $\tilde{G}((S_n)_{n\in\mathbb{N}}) = S_2 - S_0$ alors $G = \tilde{G} \circ \theta_{10}$
- ☐ $\mathbb{E}(\tilde{G}) = \mathbb{E}(\xi)^2 - 1$
- ☐ $\mathbb{E}(FH) = \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(F)$
- ☐ $\mathbb{E}(FG) = (\mathbb{E}(\xi)^2 - 1)\mathbb{E}(FS_{10})$

Exercise 3. Soit X_n une chaine de markov sur $[0,10] \cap \mathbb{Z}$. Soit $S = \inf[k > 0 : X_k = 0]$, $T = \inf[k : X_k = 10]$ et N_0 le nombre de fois que X_n visite 0 avant 10.

- ☐ $1_{S<T}$ est $\mathcal{F}_S$ mesurable
- ☐ N_0 est $\mathcal{F}_S$ mesurable
- ☐ $N_0 = 1 + N_0 \circ \theta_S$
- ☐ $\mathbb{E}_0(1_{S<T} N_0) = \mathbb{P}_0(T > S)(1 + \mathbb{E}_0(N_0))$

Exercise 4. Soit $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$. On pose X_n la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ avec $Q(x, x+1) = p$ et $Q(x, x-1) = q$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $Q(0,1) = p$ et $Q(x,y) = 0$ dans les autres couples (x, y).

- ☐ X_n est une surmartingale
- ☐ La fonction $h(x) = \frac{10}{2^x}$ est harmonique sur $\mathbb{N}^*$
- ☐ L'espace des fonctions harmonique sur $\mathbb{N}^*$est un espace vectoriel de dimension 1.
- ☐ Soit $T = \inf[k : X_k = 0]$, alors $\mathbb{P}_5(T < \infty) = \frac{1}{2^5}$.

Exercise 5. Soit G un graph connecté non orienté et X_n la marche aléatoire sur le graphe : $Q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{si } x, y \text{ sont voisins} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $X_0 = x_0 \in G$.

- ☐ Soit $x \in G$. Si X_n visite x une infinité de fois alors pour tout y voisin de x, $X_n$visite y une infinité de fois.
- ☐ Tous les points de G sont visité une infinité de fois.
- ☐ Avec probabilité non nul, il existe un point $x \in G$ qui n'est visité qu'un nombre fini de fois.
- ☐ Si h est une fonction harmonique avec $h(x_0) = c$ pour un $x_0 \in G$. Alors $h(x) = c$ pour tout $x \in G$.